# Mathématiques pour la mécanique de la rupture

*singularités, analyse asymptotique, calcul numérique*


Grégory Vial

Institut Camille Jordan, École Centrale de Lyon


Colloque Inter'actions 2016

ENS Lyon, 23–27 mai 2016

ÉCOLE CENTRALE LYON

# Mathématiques pour la mécanique de la rupture

## Contexte

# Mathématiques pour la mécanique de la rupture

## Contexte

## Contexte

## Contexte

# Mathématiques pour la mécanique de la rupture

## Questions liées à la propagation des fissures

- Problématique

- Problématique
  - Initiation de la fissuration.

- Problématique
  - Initiation de la fissuration.
  - Propagation de la fissure.

- Problématique
  - Initiation de la fissuration.
  - Propagation de la fissure.
- Autour de l'initiation de la fissuration

- Problématique
  - Initiation de la fissuration.
  - Propagation de la fissure.
- Autour de l'initiation de la fissuration
  - Sous quelle condition ?

- Problématique
  - Initiation de la fissuration.
  - Propagation de la fissure.
- Autour de l'initiation de la fissuration
  - Sous quelle condition ?
  - À quel endroit ?

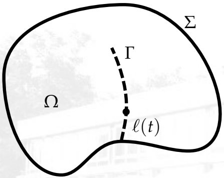
- Problématique
  - Initiation de la fissuration.
  - Propagation de la fissure.
- Autour de l'initiation de la fissuration
  - Sous quelle condition ?
  - À quel endroit ?
- Autour de la propagation de la fissure

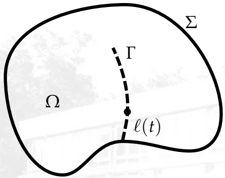
- Problématique
  - Initiation de la fissuration.
  - Propagation de la fissure.
- Autour de l'initiation de la fissuration
  - Sous quelle condition ?
  - À quel endroit ?
- Autour de la propagation de la fissure
  - Quel parcours ?

- Problématique
  - Initiation de la fissuration.
  - Propagation de la fissure.
- Autour de l'initiation de la fissuration
  - Sous quelle condition ?
  - À quel endroit ?
- Autour de la propagation de la fissure
  - Quel parcours ?
  - Quelle vitesse ?

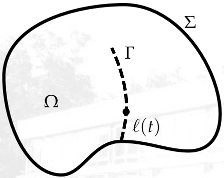
- Problématique
  - Initiation de la fissuration.
  - Propagation de la fissure.
- Autour de l'initiation de la fissuration
  - Sous quelle condition ?
  - À quel endroit ?
- Autour de la propagation de la fissure
  - Quel parcours ?
  - Quelle vitesse ?
- Problématique commune : critère de fissuration en rupture fragile.

## Quelques mots de la théorie de Griffith (1920)

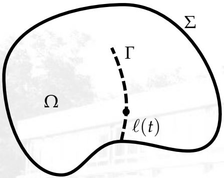




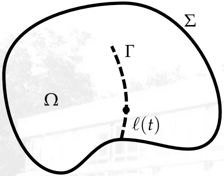

- Géométrie de la fissuration connue
  - $\Gamma$ : courbe où se développe la fissure.
  - $\ell(t)$ : longueur de la fissure au temps $t$.



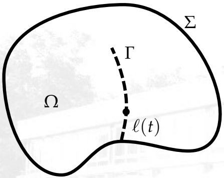

- Géométrie de la fissuration connue
  - $\Gamma$ : courbe où se développe la fissure.
  - $\ell(t)$ : longueur de la fissure au temps $t$.
- Cadre énergétique




- Géométrie de la fissuration connue
  - $\Gamma$ : courbe où se développe la fissure.
  - $\ell(t)$ : longueur de la fissure au temps $t$.
- Cadre énergétique
  - Énergie potentielle $W(\ell)$ du matériau avec fissure $\ell$.

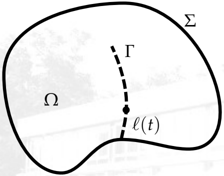



- Géométrie de la fissuration connue
  - $\Gamma$ : courbe où se développe la fissure.
  - $\ell(t)$ : longueur de la fissure au temps $t$.
- Cadre énergétique
  - Énergie potentielle $W(\ell)$ du matériau avec fissure $\ell$.
  - $P(t,\ell) = t^2 W(\ell)$ : énergie potentielle du matériau à $t$.

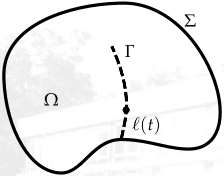



- Géométrie de la fissuration connue
  - $\Gamma$ : courbe où se développe la fissure.
  - $\ell(t)$ : longueur de la fissure au temps $t$.

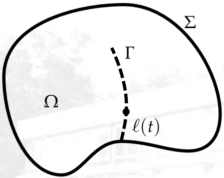
- Cadre énergétique
  - Énergie potentielle $W(\ell)$ du matériau avec fissure $\ell$.
  - $P(t, \ell) = t^2 W(\ell)$ : énergie potentielle du matériau à $t$.
  - Taux de restitution d'énergie potentielle : $G(t, \ell) = -t^2 W'(\ell)$.



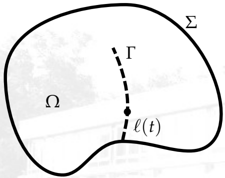

- Géométrie de la fissuration connue
  - $\Gamma$ : courbe où se développe la fissure.
  - $\ell(t)$ : longueur de la fissure au temps $t$.
- Cadre énergétique
  - Énergie potentielle $W(\ell)$ du matériau avec fissure $\ell$.
  - $P(t,\ell) = t^2 W(\ell)$ : énergie potentielle du matériau à $t$.
  - Taux de restitution d'énergie potentielle : $G(t,\ell) = -t^2 W'(\ell)$.
- Axiomes




- Géométrie de la fissuration connue
  - $\Gamma$ : courbe où se développe la fissure.
  - $\ell(t)$ : longueur de la fissure au temps $t$.
- Cadre énergétique
  - Énergie potentielle $W(\ell)$ du matériau avec fissure $\ell$.
  - $P(t,\ell) = t^2 W(\ell)$ : énergie potentielle du matériau à $t$.
  - Taux de restitution d'énergie potentielle : $G(t,\ell) = -t^2 W'(\ell)$.
- Axiomes
  - Irréversibilité : $\ell'(t) \geq 0$.




- Géométrie de la fissuration connue
  - $\Gamma$ : courbe où se développe la fissure.
  - $\ell(t)$ : longueur de la fissure au temps $t$.
- Cadre énergétique
  - Énergie potentielle $W(\ell)$ du matériau avec fissure $\ell$.
  - $P(t,\ell) = t^2 W(\ell)$ : énergie potentielle du matériau à $t$.
  - Taux de restitution d'énergie potentielle : $G(t,\ell) = -t^2 W'(\ell)$.
- Axiomes
  - Irréversibilité : $\ell'(t) \geq 0$.
  - Stabilité : $G(t,\ell(t)) \leq k$.




- Géométrie de la fissuration connue
  - $\Gamma$ : courbe où se développe la fissure.
  - $\ell(t)$ : longueur de la fissure au temps $t$.
- Cadre énergétique
  - Énergie potentielle $W(\ell)$ du matériau avec fissure $\ell$.
  - $P(t,\ell) = t^2 W(\ell)$ : énergie potentielle du matériau à $t$.
  - Taux de restitution d'énergie potentielle : $G(t,\ell) = -t^2 W'(\ell)$.
- Axiomes
  - Irréversibilité : $\ell'(t) \geq 0$.
  - Stabilité : $G(t,\ell(t)) \leq k$.
  - Activation : $[G(t,\ell(t)) - k]\ell'(t) = 0$.

# Mathématiques pour la mécanique de la rupture

## Quelques mots de la théorie de Griffith (1920)

- **Résumé** : $\ell(t) \in [0, L]$.
  - $P(t,\ell) = t^2 W(\ell)$ et $G(t,\ell) = -t^2 W'(\ell)$.
  - Irréversibilité : $\ell'(t) \geq 0$.
  - Stabilité : $G(t,\ell(t)) \leq k$.
  - Activation : $[G(t,\ell(t)) - k]\ell'(t) = 0$.

- **Résumé** : $\ell(t) \in [0, L]$.
  - $P(t, \ell) = t^2 W(\ell)$ et $G(t, \ell) = -t^2 W'(\ell)$.
  - Irréversibilité : $\ell'(t) \geq 0$.
  - Stabilité : $G(t, \ell(t)) \leq k$.
  - Activation : $[G(t, \ell(t)) - k]\ell'(t) = 0$.

**Théorème.** Si $W \in \mathscr{C}^2$ est strictement convexe, il existe $T > 0$ et $\ell \in \mathscr{C}^1([0, T])$ unique solution.

- **Résumé** : $\ell(t) \in [0, L]$.
  - $P(t,\ell) = t^2 W(\ell)$ et $G(t,\ell) = -t^2 W'(\ell)$.
  - Irréversibilité : $\ell'(t) \geq 0$.
  - Stabilité : $G(t,\ell(t)) \leq k$.
  - Activation : $[G(t,\ell(t)) - k]\ell'(t) = 0$.

> **Théorème.** Si $W \in \mathscr{C}^2$ est strictement convexe, il existe $T > 0$ et $\ell \in \mathscr{C}^1([0,T])$ unique solution.

Preuve. On pose $\varphi_t(\ell) = P(t,\ell) + k\ell$

- **Résumé** : $\ell(t) \in [0, L]$.
  - $P(t,\ell) = t^2 W(\ell)$ et $G(t,\ell) = -t^2 W'(\ell)$.
  - Irréversibilité : $\ell'(t) \geq 0$.
  - Stabilité : $G(t,\ell(t)) \leq k$.
  - Activation : $[G(t,\ell(t)) - k]\ell'(t) = 0$.

**Théorème.** Si $W \in \mathscr{C}^2$ est strictement convexe, il existe $T > 0$ et $\ell \in \mathscr{C}^1([0,T])$ unique solution.

Preuve. On pose $\varphi_t(\ell) = P(t,\ell) + k\ell$ ; donc $\varphi_t'(\ell) = t^2 W'(\ell) + k$.

- **Résumé** : $\ell(t) \in [0, L]$.
  - $P(t,\ell) = t^2 W(\ell)$ et $G(t,\ell) = -t^2 W'(\ell)$.
  - Irréversibilité : $\ell'(t) \geq 0$.
  - Stabilité : $G(t, \ell(t)) \leq k$.
  - Activation : $[G(t,\ell(t)) - k]\ell'(t) = 0$.

> **Théorème.** Si $W \in \mathscr{C}^2$ est strictement convexe, il existe $T > 0$ et $\ell \in \mathscr{C}^1([0, T])$ unique solution.

Preuve. On pose $\varphi_t(\ell) = P(t,\ell) + k\ell$ ; donc $\varphi_t'(\ell) = t^2 W'(\ell) + k$.

On pose $t_0 = \sqrt{-k/W'(0)}$ et $T = \sqrt{-k/W'(L)}$.

- **Résumé** : $\ell(t) \in [0, L]$.
  - $P(t,\ell) = t^2 W(\ell)$ et $G(t,\ell) = -t^2 W'(\ell)$.
  - Irréversibilité : $\ell'(t) \geq 0$.
  - Stabilité : $G(t, \ell(t)) \leq k$.
  - Activation : $[G(t,\ell(t)) - k]\ell'(t) = 0$.

> **Théorème.** Si $W \in \mathscr{C}^2$ est strictement convexe, il existe $T > 0$ et $\ell \in \mathscr{C}^1([0, T])$ unique solution.

Preuve. On pose $\varphi_t(\ell) = P(t,\ell) + k\ell$ ; donc $\varphi_t'(\ell) = t^2 W'(\ell) + k$.

On pose $t_0 = \sqrt{-k/W'(0)}$ et $T = \sqrt{-k/W'(L)}$.

- Si $t \leq t_0$, $\ell_t^* = 0$ minimise $\varphi_t$.

- **Résumé** : $\ell(t) \in [0, L]$.
  - $P(t,\ell) = t^2 W(\ell)$ et $G(t,\ell) = -t^2 W'(\ell)$.
  - Irréversibilité : $\ell'(t) \geq 0$.
  - Stabilité : $G(t, \ell(t)) \leq k$.
  - Activation : $[G(t, \ell(t)) - k]\ell'(t) = 0$.

> **Théorème.** Si $W \in \mathscr{C}^2$ est strictement convexe, il existe $T > 0$ et $\ell \in \mathscr{C}^1([0, T])$ unique solution.

Preuve. On pose $\varphi_t(\ell) = P(t,\ell) + k\ell$ ; donc $\varphi_t'(\ell) = t^2 W'(\ell) + k$.

On pose $t_0 = \sqrt{-k/W'(0)}$ et $T = \sqrt{-k/W'(L)}$.

- Si $t \leq t_0$, $\ell_t^* = 0$ minimise $\varphi_t$.
- Si $t_0 < t < T$, $\exists! \ell_t^*$ minimisant $\varphi_t$.

- **Résumé** : $\ell(t) \in [0, L]$.
  - $P(t,\ell) = t^2 W(\ell)$ et $G(t,\ell) = -t^2 W'(\ell)$.
  - Irréversibilité : $\ell'(t) \geq 0$.
  - Stabilité : $G(t,\ell(t)) \leq k$.
  - Activation : $[G(t,\ell(t)) - k]\ell'(t) = 0$.

**Théorème.** Si $W \in \mathscr{C}^2$ est strictement convexe, il existe $T > 0$ et $\ell \in \mathscr{C}^1([0,T])$ unique solution.

Preuve. On pose $\varphi_t(\ell) = P(t,\ell) + k\ell$ ; donc $\varphi_t'(\ell) = t^2 W'(\ell) + k$.

On pose $t_0 = \sqrt{-k/W'(0)}$ et $T = \sqrt{-k/W'(L)}$.

- Si $t \leq t_0$, $\ell_t^* = 0$ minimise $\varphi_t$.
- Si $t_0 < t < T$, $\exists! \ell_t^*$ minimisant $\varphi_t$.
- Si $t = T$, $\ell_T^* = L$ minimise $\varphi_t$.

- **Résumé** : $\ell(t) \in [0, L]$.
  - $P(t, \ell) = t^2 W(\ell)$ et $G(t, \ell) = -t^2 W'(\ell)$.
  - Irréversibilité : $\ell'(t) \geq 0$.
  - Stabilité : $G(t, \ell(t)) \leq k$.
  - Activation : $[G(t, \ell(t)) - k]\ell'(t) = 0$.

> **Théorème.** Si $W \in \mathscr{C}^2$ est strictement convexe, il existe $T > 0$ et $\ell \in \mathscr{C}^1([0, T])$ unique solution.

Preuve. On pose $\varphi_t(\ell) = P(t, \ell) + k\ell$ ; donc $\varphi_t'(\ell) = t^2 W'(\ell) + k$.

On pose $t_0 = \sqrt{-k/W'(0)}$ et $T = \sqrt{-k/W'(L)}$.

- Si $t \leq t_0$, $\ell_t^* = 0$ minimise $\varphi_t$.
- Si $t_0 < t < T$, $\exists ! \ell_t^*$ minimisant $\varphi_t$.
- Si $t = T$, $\ell_T^* = L$ minimise $\varphi_t$.

On voit que $\ell(t) = \ell_t^*$ satisfait les axiomes.

- **Résumé** : $\ell(t) \in [0, L]$.
  - $P(t,\ell) = t^2 W(\ell)$ et $G(t,\ell) = -t^2 W'(\ell)$.
  - Irréversibilité : $\ell'(t) \geq 0$.
  - Stabilité : $G(t,\ell(t)) \leq k$.
  - Activation : $[G(t,\ell(t)) - k]\ell'(t) = 0$.

> **Théorème.** Si $W \in \mathscr{C}^2$ est strictement convexe, il existe $T > 0$ et $\ell \in \mathscr{C}^1([0,T])$ unique solution.

Preuve. On pose $\varphi_t(\ell) = P(t,\ell) + k\ell$ ; donc $\varphi_t'(\ell) = t^2 W'(\ell) + k$.

On pose $t_0 = \sqrt{-k/W'(0)}$ et $T = \sqrt{-k/W'(L)}$.

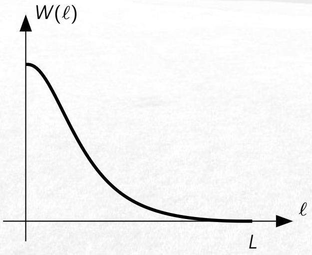
- Si $t \leq t_0$, $\ell_t^* = 0$ minimise $\varphi_t$.
- Si $t_0 < t < T$, $\exists! \ell_t^*$ minimisant $\varphi_t$.
- Si $t = T$, $\ell_T^* = L$ minimise $\varphi_t$.

On voit que $\ell(t) = \ell_t^*$ satisfait les axiomes. Il y a unicité. $\square$

**Théorème.** Si $W \in \mathscr{C}^2$ est strictement convexe, il existe $T > 0$ et $\ell \in \mathscr{C}^1([0, T])$ unique solution.

**Théorème.** Si $W \in \mathscr{C}^2$ est strictement convexe, il existe $T > 0$ et $\ell \in \mathscr{C}^1([0, T])$ unique solution.

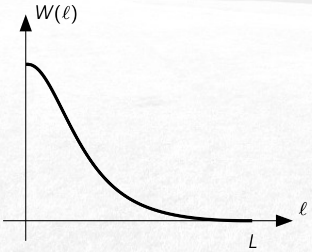
- Problème : $W$ n'est pas convexe.



> **Théorème.** Si $W \in \mathscr{C}^2$ est strictement convexe, il existe $T > 0$ et $\ell \in \mathscr{C}^1([0,T])$ unique solution.

- Problème : $W$ n'est pas convexe.
- Idée : définir $\ell(t)$ comme solution de

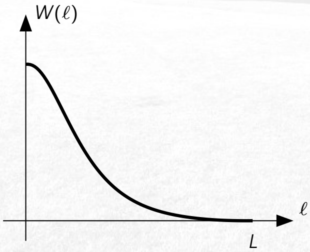
$$\ell(t) = \underset{\ell}{\operatorname{argmin}}\{P(t,\ell) + k\ell\} = \underset{\ell}{\operatorname{argmin}}\{t^2 W(\ell) + k\ell\}.$$



**Théorème.** Si $W \in \mathscr{C}^2$ est strictement convexe, il existe $T > 0$ et $\ell \in \mathscr{C}^1([0, T])$ unique solution.

- Problème : $W$ n'est pas convexe.
- Idée : définir $\ell(t)$ comme solution de

$$\ell(t) = \operatorname*{argmin}_{\ell}\{P(t,\ell) + k\ell\} = \operatorname*{argmin}_{\ell}\{t^2 W(\ell) + k\ell\}.$$

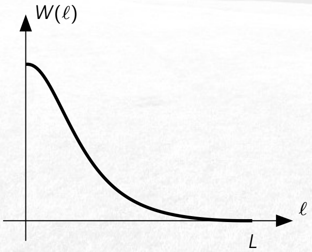



- $\ell = 0$ est solution pour $t$ petit.

**Théorème.** Si $W \in \mathscr{C}^2$ est strictement convexe, il existe $T > 0$ et $\ell \in \mathscr{C}^1([0, T])$ unique solution.

- Problème : $W$ n'est pas convexe.
- Idée : définir $\ell(t)$ comme solution de

$$\ell(t) = \operatorname*{argmin}_{\ell}\{P(t,\ell) + k\ell\} = \operatorname*{argmin}_{\ell}\{t^2 W(\ell) + k\ell\}.$$



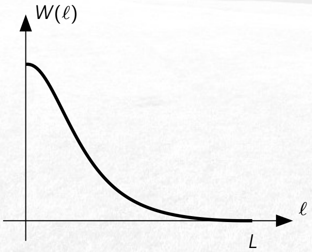

- $\ell = 0$ est solution pour $t$ petit.
- $\ell = 0$ est solution tant que

$$t^2 W(0) \leq t^2 W(\ell) + k\ell.$$

**Théorème.** Si $W \in \mathscr{C}^2$ est strictement convexe, il existe $T > 0$ et $\ell \in \mathscr{C}^1([0,T])$ unique solution.

- Problème : $W$ n'est pas convexe.
- Idée : définir $\ell(t)$ comme solution de

$$\ell(t) = \operatorname*{argmin}_{\ell}\{P(t,\ell) + k\ell\} = \operatorname*{argmin}_{\ell}\{t^2 W(\ell) + k\ell\}.$$



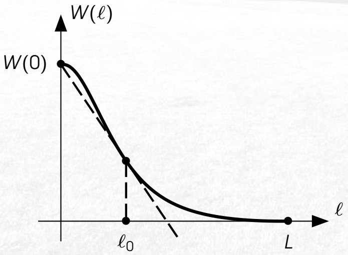

- $\ell = 0$ est solution pour $t$ petit.
- $\ell = 0$ est solution tant que

$$W(\ell) \geq W(0) - \frac{kt^2}{\ell}.$$

> **Théorème.** Si $W \in \mathscr{C}^2$ est strictement convexe, il existe $T > 0$ et $\ell \in \mathscr{C}^1([0, T])$ unique solution.

- Problème : $W$ n'est pas convexe.
- Idée : définir $\ell(t)$ comme solution de

$$\ell(t) = \operatorname*{argmin}_{\ell}\{P(t,\ell) + k\ell\} = \operatorname*{argmin}_{\ell}\{t^2 W(\ell) + k\ell\}.$$



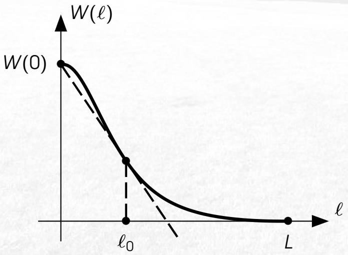

- $\ell = 0$ est solution pour $t$ petit.
- $\ell = 0$ est solution tant que

$$W(\ell) \geq W(0) - \frac{kt^2}{\ell}.$$

**Théorème.** Si $W \in \mathscr{C}^2$ est strictement convexe, il existe $T > 0$ et $\ell \in \mathscr{C}^1([0, T])$ unique solution.

- Problème : $W$ n'est pas convexe.
- Idée : définir $\ell(t)$ comme solution de

$$\ell(t) = \underset{\ell}{\operatorname{argmin}}\{P(t,\ell) + k\ell\} = \underset{\ell}{\operatorname{argmin}}\{t^2 W(\ell) + k\ell\}.$$




- $\ell = 0$ est solution pour $t$ petit.
- $\ell = 0$ est solution tant que

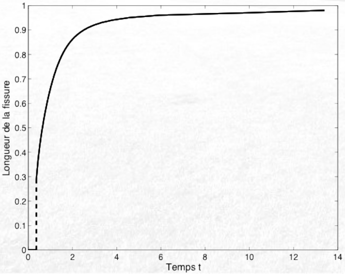
$$W(\ell) \geq W(0) - \frac{kt^2}{\ell}.$$

- $W$ strict. convexe sur $[\ell_0, L]$.

**Théorème.** Si $W \in \mathscr{C}^2$ est strictement convexe, il existe $T > 0$ et $\ell \in \mathscr{C}^1([0,T])$ unique solution.

- Problème : $W$ n'est pas convexe.
- Idée : définir $\ell(t)$ comme solution de

$$\ell(t) = \underset{\ell}{\operatorname{argmin}}\{P(t,\ell) + k\ell\} = \underset{\ell}{\operatorname{argmin}}\{t^2 W(\ell) + k\ell\}.$$




- $\ell = 0$ est solution pour $t$ petit.
- $\ell = 0$ est solution tant que

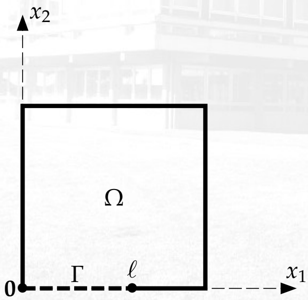
$$W(\ell) \geq W(0) - \frac{kt^2}{\ell}.$$

- $W$ strict. convexe sur $[\ell_0, L]$.

- Comment calculer l'énergie $W(\ell)$ ?

- Comment calculer l'énergie $W(\ell)$ ?
- **Cadre réaliste** : élasticité linéaire 3D
  - $\vec{u}(x_1, x_2, x_3)$ : vecteur déplacement (inconnue).
  - $\vec{f}(x_1, x_2, x_2)$ : vecteur chargement (connu).
  - EDP : « $L\vec{u} = \vec{f}$ », avec $L$ opérateur linéaire.
  - Conditions aux limites.

- Comment calculer l'énergie $W(\ell)$ ?
- **Problème « jouet »** $\left(\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2}\right)$

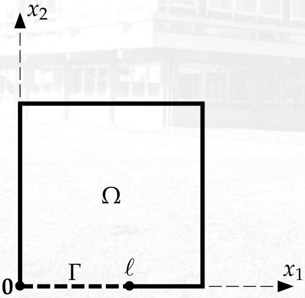



$$\left\{\begin{array}{rcll} -\Delta u(\mathbf{x}) & = & f(\mathbf{x}) & \text{dans } \Omega, \\ u(\mathbf{x}) & = & 0 & \text{sur } \partial\Omega \setminus \Gamma, \\ \dfrac{\partial u}{\partial x_2}(\mathbf{x}) & = & 0 & \text{sur } \Gamma, \end{array}\right.$$

et

$$W(\ell) = -\int_\Omega |\nabla u|^2.$$

- Comment calculer l'énergie $W(\ell)$ ?
- **Problème « jouet »** $\left(\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2}\right)$




$$\begin{cases} -\Delta u(\mathbf{x}) & = & f(\mathbf{x}) & \text{dans } \Omega, \\ u(\mathbf{x}) & = & 0 & \text{sur } \partial\Omega \setminus \Gamma, \\ \dfrac{\partial u}{\partial x_2}(\mathbf{x}) & = & 0 & \text{sur } \Gamma, \end{cases}$$

et

$$W(\ell) = -\int_\Omega |\nabla u|^2.$$

**Question :** relier $W(\ell)$ au comportement de $u$ en front de fissure ?

# Mathématiques pour la mécanique de la rupture

## Régularité des problèmes elliptiques

- **Constat** : si $u \in \mathscr{C}^k(\Omega)$, alors $f = -\Delta u \in \mathscr{C}^{k-2}(\Omega)$.

- **Constat** : si $u \in \mathrm{H}^k(\Omega)$, alors $f = -\Delta u \in \mathrm{H}^{k-2}(\Omega)$.

- **Constat** : si $u \in \mathrm{H}^k(\Omega)$, alors $f = -\Delta u \in \mathrm{H}^{k-2}(\Omega)$.

$$H^k(\Omega) = \left\{ u \in \mathrm{L}^2(\Omega) \; ; \; \forall |\alpha| \leq k, \; \partial^\alpha u \in \mathrm{L}^2(\Omega) \right\}.$$

- **Constat** : si $u \in \mathrm{H}^k(\Omega)$, alors $f = -\Delta u \in \mathrm{H}^{k-2}(\Omega)$.

$$H^k(\Omega) = \left\{ u \in \mathrm{L}^2(\Omega) \; ; \; \forall |\alpha| \leq k, \; \partial^\alpha u \in \mathrm{L}^2(\Omega) \right\}.$$

- Remarque : si $f \in \mathrm{L}^2(\Omega)$, $\exists! u \in \mathrm{H}^1(\Omega)$ solution du pb.

- **Constat** : si $u \in \mathrm{H}^k(\Omega)$, alors $f = -\Delta u \in \mathrm{H}^{k-2}(\Omega)$.

$$H^k(\Omega) = \left\{ u \in \mathrm{L}^2(\Omega) \; ; \; \forall |\alpha| \leq k, \; \partial^\alpha u \in \mathrm{L}^2(\Omega) \right\}.$$

- Remarque : si $f \in \mathrm{L}^2(\Omega)$, $\exists! u \in \mathrm{H}^1(\Omega)$ solution du pb.
- **Réciproque ?**

- **Constat** : si $u \in \mathrm{H}^k(\Omega)$, alors $f = -\Delta u \in \mathrm{H}^{k-2}(\Omega)$.

$$H^k(\Omega) = \left\{ u \in \mathrm{L}^2(\Omega) \; ; \; \forall |\alpha| \leq k, \; \partial^\alpha u \in \mathrm{L}^2(\Omega) \right\}.$$

- Remarque : si $f \in \mathrm{L}^2(\Omega)$, $\exists ! u \in \mathrm{H}^1(\Omega)$ solution du pb.
- **Réciproque ?**
  - OK dans $\mathbb{R}^d$ :

- **Constat** : si $u \in \mathrm{H}^k(\Omega)$, alors $f = -\Delta u \in \mathrm{H}^{k-2}(\Omega)$.

$$H^k(\Omega) = \left\{ u \in \mathrm{L}^2(\Omega) \; ; \; \forall |\alpha| \leq k, \; \partial^\alpha u \in \mathrm{L}^2(\Omega) \right\}.$$

- Remarque : si $f \in \mathrm{L}^2(\Omega)$, $\exists! u \in \mathrm{H}^1(\Omega)$ solution du pb.
- **Réciproque ?**
  - OK dans $\mathbb{R}^d$ :

$$\mathrm{H}^k(\mathbb{R}^d) = \left\{ u \in \mathrm{L}^2(\Omega) \; ; \; \left(1 + |\xi|^2\right)^{\frac{k}{2}} \widehat{u} \in \mathrm{L}^2(\mathbb{R}^d) \right\}.$$

- **Constat** : si $u \in \mathrm{H}^k(\Omega)$, alors $f = -\Delta u \in \mathrm{H}^{k-2}(\Omega)$.

$$H^k(\Omega) = \left\{ u \in \mathrm{L}^2(\Omega)\ ;\ \forall |\alpha| \leq k,\ \partial^\alpha u \in \mathrm{L}^2(\Omega) \right\}.$$

- Remarque : si $f \in \mathrm{L}^2(\Omega)$, $\exists! u \in \mathrm{H}^1(\Omega)$ solution du pb.
- **Réciproque ?**
  - OK dans $\mathbb{R}^d$ :

$$\mathrm{H}^k(\mathbb{R}^d) = \left\{ u \in \mathrm{L}^2(\Omega)\ ;\ \left(1 + |\xi|^2\right)^{\frac{k}{2}} \widehat{u} \in \mathrm{L}^2(\mathbb{R}^d) \right\}.$$

Si $u \in \mathrm{L}^2$ et $-\Delta u \in \mathrm{L}^2$, alors $u - \Delta u \in \mathrm{L}^2$

- **Constat** : si $u \in \mathrm{H}^k(\Omega)$, alors $f = -\Delta u \in \mathrm{H}^{k-2}(\Omega)$.

$$H^k(\Omega) = \left\{ u \in \mathrm{L}^2(\Omega)\ ;\ \forall |\alpha| \leq k,\ \partial^\alpha u \in \mathrm{L}^2(\Omega) \right\}.$$

- Remarque : si $f \in \mathrm{L}^2(\Omega)$, $\exists! u \in \mathrm{H}^1(\Omega)$ solution du pb.
- **Réciproque ?**
  - OK dans $\mathbb{R}^d$ :

$$\mathrm{H}^k(\mathbb{R}^d) = \left\{ u \in \mathrm{L}^2(\Omega)\ ;\ \left(1 + |\xi|^2\right)^{\frac{k}{2}} \widehat{u} \in \mathrm{L}^2(\mathbb{R}^d) \right\}.$$

Si $u \in \mathrm{L}^2$ et $-\Delta u \in \mathrm{L}^2$, alors $u - \Delta u \in \mathrm{L}^2$ et

$$\mathscr{F}[u - \Delta u](\xi) = (1 + |\xi|^2)\widehat{u}(\xi),$$

- **Constat** : si $u \in \mathrm{H}^k(\Omega)$, alors $f = -\Delta u \in \mathrm{H}^{k-2}(\Omega)$.

$$H^k(\Omega) = \left\{ u \in \mathrm{L}^2(\Omega) \; ; \; \forall |\alpha| \leq k, \; \partial^\alpha u \in \mathrm{L}^2(\Omega) \right\}.$$

- Remarque : si $f \in \mathrm{L}^2(\Omega)$, $\exists! u \in \mathrm{H}^1(\Omega)$ solution du pb.
- **Réciproque ?**
  - OK dans $\mathbb{R}^d$ :

$$\mathrm{H}^k(\mathbb{R}^d) = \left\{ u \in \mathrm{L}^2(\Omega) \; ; \; \left(1 + |\xi|^2\right)^{\frac{k}{2}} \hat{u} \in \mathrm{L}^2(\mathbb{R}^d) \right\}.$$

Si $u \in \mathrm{L}^2$ et $-\Delta u \in \mathrm{L}^2$, alors $u - \Delta u \in \mathrm{L}^2$ et

$$\mathscr{F}[u - \Delta u](\xi) = (1 + |\xi|^2)\widehat{u}(\xi),$$

donc $u \in \mathrm{H}^2(\mathbb{R}^d)$.

- **Constat** : si $u \in \mathrm{H}^k(\Omega)$, alors $f = -\Delta u \in \mathrm{H}^{k-2}(\Omega)$.

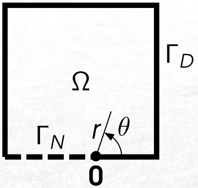
$$H^k(\Omega) = \left\{ u \in \mathrm{L}^2(\Omega) \; ; \; \forall |\alpha| \leq k, \; \partial^\alpha u \in \mathrm{L}^2(\Omega) \right\}.$$

- Remarque : si $f \in \mathrm{L}^2(\Omega)$, $\exists! u \in \mathrm{H}^1(\Omega)$ solution du pb.
- **Réciproque ?**
  - Pas OK dans $\Omega$ en général.

- **Constat** : si $u \in \mathrm{H}^k(\Omega)$, alors $f = -\Delta u \in \mathrm{H}^{k-2}(\Omega)$.

$$H^k(\Omega) = \left\{ u \in \mathrm{L}^2(\Omega) \; ; \; \forall |\alpha| \leq k, \; \partial^\alpha u \in \mathrm{L}^2(\Omega) \right\}.$$

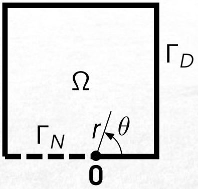
- Remarque : si $f \in \mathrm{L}^2(\Omega)$, $\exists! u \in \mathrm{H}^1(\Omega)$ solution du pb.
- **Réciproque ?**
  - Pas OK dans $\Omega$ en général.



- **Constat** : si $u \in \mathrm{H}^k(\Omega)$, alors $f = -\Delta u \in \mathrm{H}^{k-2}(\Omega)$.

$$H^k(\Omega) = \left\{ u \in \mathrm{L}^2(\Omega) \; ; \; \forall |\alpha| \leq k, \; \partial^\alpha u \in \mathrm{L}^2(\Omega) \right\}.$$

- Remarque : si $f \in \mathrm{L}^2(\Omega)$, $\exists! u \in \mathrm{H}^1(\Omega)$ solution du pb.
- **Réciproque ?**
  - Pas OK dans $\Omega$ en général.



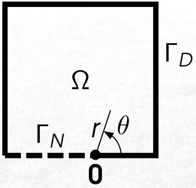

Soit $u(r,\theta) = \eta(r)\mathfrak{s}(r,\theta)$, avec $\mathfrak{s}(t,\theta) = \sqrt{r}\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)$,

et $\eta = 1$ pour $r < r_*$ et $\eta = 0$ pour $r > r^*$.

- **Constat** : si $u \in \mathrm{H}^k(\Omega)$, alors $f = -\Delta u \in \mathrm{H}^{k-2}(\Omega)$.

$$H^k(\Omega) = \left\{ u \in \mathrm{L}^2(\Omega) \; ; \; \forall |\alpha| \leq k, \; \partial^\alpha u \in \mathrm{L}^2(\Omega) \right\}.$$

- Remarque : si $f \in \mathrm{L}^2(\Omega)$, $\exists! u \in \mathrm{H}^1(\Omega)$ solution du pb.
- **Réciproque ?**
  - Pas OK dans $\Omega$ en général.




Soit $u(r,\theta) = \eta(r)\mathfrak{s}(r,\theta)$, avec $\mathfrak{s}(t,\theta) = \sqrt{r}\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)$,

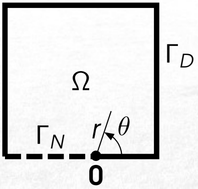
et $\eta = 1$ pour $r < r_*$ et $\eta = 0$ pour $r > r^*$.

$$\Delta u = \eta \Delta \mathfrak{s} + 2\nabla\eta \cdot \nabla \mathfrak{s} + \Delta\eta\mathfrak{s}$$

- **Constat** : si $u \in \mathrm{H}^k(\Omega)$, alors $f = -\Delta u \in \mathrm{H}^{k-2}(\Omega)$.

$$H^k(\Omega) = \left\{ u \in \mathrm{L}^2(\Omega) \; ; \; \forall |\alpha| \leq k, \; \partial^\alpha u \in \mathrm{L}^2(\Omega) \right\}.$$

- Remarque : si $f \in \mathrm{L}^2(\Omega)$, $\exists! u \in \mathrm{H}^1(\Omega)$ solution du pb.
- **Réciproque ?**
  - Pas OK dans $\Omega$ en général.




Soit $u(r,\theta) = \eta(r)\mathfrak{s}(r,\theta)$, avec $\mathfrak{s}(t,\theta) = \sqrt{r}\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)$,

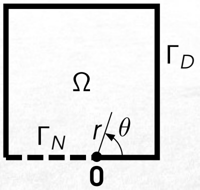
et $\eta = 1$ pour $r < r_*$ et $\eta = 0$ pour $r > r^*$.

$$\Delta u = 2\nabla\eta \cdot \nabla\mathfrak{s} + \Delta\eta\mathfrak{s}$$

- **Constat** : si $u \in \mathrm{H}^k(\Omega)$, alors $f = -\Delta u \in \mathrm{H}^{k-2}(\Omega)$.

$$H^k(\Omega) = \left\{ u \in \mathrm{L}^2(\Omega) \; ; \; \forall |\alpha| \leq k, \; \partial^\alpha u \in \mathrm{L}^2(\Omega) \right\}.$$

- Remarque : si $f \in \mathrm{L}^2(\Omega)$, $\exists! u \in \mathrm{H}^1(\Omega)$ solution du pb.
- **Réciproque ?**
  - Pas OK dans $\Omega$ en général.




Soit $u(r,\theta) = \eta(r)\mathfrak{s}(r,\theta)$, avec $\mathfrak{s}(t,\theta) = \sqrt{r}\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)$,

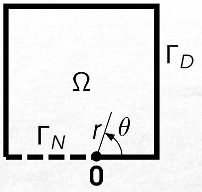
et $\eta = 1$ pour $r < r_*$ et $\eta = 0$ pour $r > r^*$.

$$\Delta u = 2\nabla\eta \cdot \nabla\mathfrak{s} + \Delta\eta\mathfrak{s} \in \mathscr{C}^\infty(\overline{\Omega}) \subset \mathrm{L}^2(\Omega).$$

- **Constat** : si $u \in \mathrm{H}^k(\Omega)$, alors $f = -\Delta u \in \mathrm{H}^{k-2}(\Omega)$.

$$H^k(\Omega) = \left\{ u \in \mathrm{L}^2(\Omega)\ ;\ \forall |\alpha| \leq k,\ \partial^\alpha u \in \mathrm{L}^2(\Omega) \right\}.$$

- Remarque : si $f \in \mathrm{L}^2(\Omega)$, $\exists! u \in \mathrm{H}^1(\Omega)$ solution du pb.
- **Réciproque ?**
  - Pas OK dans $\Omega$ en général.




Soit $u(r,\theta) = \eta(r)\mathfrak{s}(r,\theta)$, avec $\mathfrak{s}(t,\theta) = \sqrt{r}\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)$,

et $\eta = 1$ pour $r < r_*$ et $\eta = 0$ pour $r > r^*$.

$$\Delta u = 2\nabla\eta \cdot \nabla\mathfrak{s} + \Delta\eta\mathfrak{s} \in \mathscr{C}^\infty(\overline{\Omega}) \subset \mathrm{L}^2(\Omega).$$

Pourtant $u \notin \mathrm{H}^2(\Omega)$.

# Mathématiques pour la mécanique de la rupture

## Singularités des problèmes elliptiques

- **Le problème de Dirichlet**

- **Le problème de Dirichlet**
  - Dans un ouvert régulier

**Théorème.** Si $f \in \mathrm{L}^2(\Omega)$ et $\partial\Omega$ est de classe $\mathscr{C}^2$, alors la solution $u \in \mathrm{H}^1(\Omega)$ de

$$-\Delta u = f \text{ dans } \Omega, \qquad u = 0 \text{ sur } \partial\Omega$$

satisfait $u \in \mathrm{H}^2(\Omega)$.

- **Le problème de Dirichlet**
  - Dans un polygone

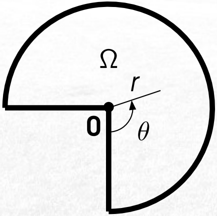
> **Théorème.** Si $f \in \mathrm{L}^2(\Omega)$ et $\partial\Omega$ possède un sommet d'angle $\omega$, alors la solution $u \in \mathrm{H}^1(\Omega)$ de
>
> $$-\Delta u = f \text{ dans } \Omega, \qquad u = 0 \text{ sur } \partial\Omega$$
>
> satisfait $u = u_{\mathrm{reg}} + \lambda r^\alpha \sin(\alpha\theta)$, avec $u_{\mathrm{reg}} \in \mathrm{H}^2(\Omega)$ et $\alpha = \frac{\pi}{\omega}$.

**Remarque.** $r^\alpha \sin(\alpha\theta) \in \mathrm{H}^2(\Omega)$ ssi $\alpha > 1$.

- **Le problème de Dirichlet**
  - Dans un polygone

> **Théorème.** Si $f \in L^2(\Omega)$ et $\partial\Omega$ possède un sommet d'angle $\omega$, alors la solution $u \in H^1(\Omega)$ de
>
> $$-\Delta u = f \text{ dans } \Omega, \qquad u = 0 \text{ sur } \partial\Omega$$
>
> satisfait $u = u_{\text{reg}} + \lambda r^\alpha \sin(\alpha\theta)$, avec $u_{\text{reg}} \in H^2(\Omega)$ et $\alpha = \frac{\pi}{\omega}$.

**Remarque.** $r^\alpha \sin(\alpha\theta) \in H^2(\Omega)$ ssi $\alpha > 1$.



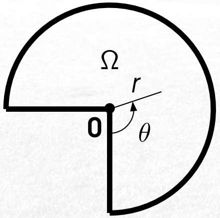
- **Le problème de Dirichlet**
  - Dans un polygone

**Théorème.** Si $f \in L^2(\Omega)$ et $\partial\Omega$ possède un sommet d'angle $\omega$, alors la solution $u \in H^1(\Omega)$ de

$$-\Delta u = f \text{ dans } \Omega, \qquad u = 0 \text{ sur } \partial\Omega$$

satisfait $u = u_{\text{reg}} + \lambda r^\alpha \sin(\alpha\theta)$, avec $u_{\text{reg}} \in H^2(\Omega)$ et $\alpha = \frac{\pi}{\omega}$.

**Remarque.** $r^\alpha \sin(\alpha\theta) \in H^2(\Omega)$ ssi $\alpha > 1$.




Le gradient du déplacement n'est pas borné :

$$\nabla u \underset{0}{\simeq} r^{-\frac{1}{3}}$$

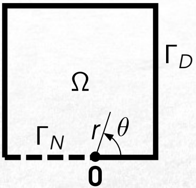
- **Le problème mixte**

> **Théorème.** Si $f \in L^2(\Omega)$ et $\partial\Omega$ possède un sommet d'angle $\omega$, alors la solution $u \in H^1(\Omega)$ de
>
> $$-\Delta u = f \text{ dans } \Omega, \quad u = 0 \text{ sur } \partial\Gamma_D, \quad \partial_\nu u = 0 \text{ sur } \Gamma_N$$
>
> satisfait $u = u_{\mathrm{reg}} + \lambda r^\alpha \sin(\alpha\theta)$, avec $u_{\mathrm{reg}} \in H^2(\Omega)$ et $\alpha = \frac{\pi}{2\omega}$.

- **Le problème mixte**

> **Théorème.** Si $f \in \mathrm{L}^2(\Omega)$ et $\partial\Omega$ possède un sommet d'angle $\omega$, alors la solution $u \in \mathrm{H}^1(\Omega)$ de
>
> $$-\Delta u = f \text{ dans } \Omega, \quad u = 0 \text{ sur } \partial\Gamma_D, \quad \partial_\nu u = 0 \text{ sur } \Gamma_N$$
>
> satisfait $u = u_{\mathrm{reg}} + \lambda r^\alpha \sin(\alpha\theta)$, avec $u_{\mathrm{reg}} \in \mathrm{H}^2(\Omega)$ et $\alpha = \frac{\pi}{2\omega}$.

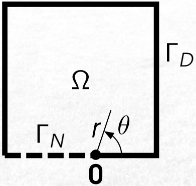
- **Remarque.** Pour la fissure $\omega = \pi$.



- **Le problème mixte**

> **Théorème.** Si $f \in L^2(\Omega)$ et $\partial\Omega$ possède un sommet d'angle $\omega$, alors la solution $u \in H^1(\Omega)$ de
>
> $$-\Delta u = f \text{ dans } \Omega, \quad u = 0 \text{ sur } \partial\Gamma_D, \quad \partial_\nu u = 0 \text{ sur } \Gamma_N$$
>
> satisfait $u = u_{\mathrm{reg}} + \lambda r^\alpha \sin(\alpha\theta)$, avec $u_{\mathrm{reg}} \in H^2(\Omega)$ et $\alpha = \frac{\pi}{2\omega}$.

- **Remarque.** Pour la fissure $\omega = \pi$.

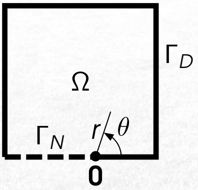



$\lambda$ : facteur d'intensité de contrainte (SIF).

- **Le problème mixte**

> **Théorème.** Si $f \in \mathrm{L}^2(\Omega)$ et $\partial\Omega$ possède un sommet d'angle $\omega$, alors la solution $u \in \mathrm{H}^1(\Omega)$ de
>
> $$-\Delta u = f \text{ dans } \Omega, \quad u = 0 \text{ sur } \partial\Gamma_D, \quad \partial_\nu u = 0 \text{ sur } \Gamma_N$$
>
> satisfait $u = u_{\text{reg}} + \lambda r^\alpha \sin(\alpha\theta)$, avec $u_{\text{reg}} \in \mathrm{H}^2(\Omega)$ et $\alpha = \frac{\pi}{2\omega}$.

- **Remarque.** Pour la fissure $\omega = \pi$.



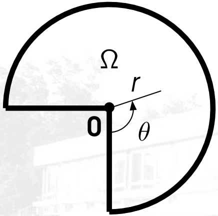

$\lambda$ : facteur d'intensité de contrainte (SIF).

Lien avec le taux de restitution d'énergie :

$$W'(\ell) = -\lambda^2 \frac{\pi}{4}.$$

# Mathématiques pour la mécanique de la rupture

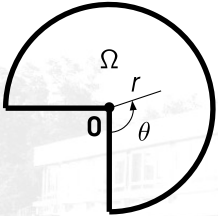
## Enjeux numériques




- Problème modèle :

$$\begin{cases} -\Delta u = f & \text{dans } \Omega, \\ u = 0 & \text{sur } \partial\Omega. \end{cases}$$

$$\mathcal{H} = H_0^1(\Omega) = \{u \in H^1(\Omega)\ ;\ u = 0 \text{ sur } \partial\Omega\}.$$

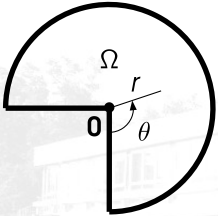



- Problème modèle :

$$\begin{cases} -\Delta u = f & \text{dans } \Omega, \\ u = 0 & \text{sur } \partial\Omega. \end{cases}$$

$$\mathcal{H} = \mathrm{H}^1_0(\Omega) = \{u \in \mathrm{H}^1(\Omega)\ ;\ u = 0 \text{ sur } \partial\Omega\}.$$

- Formulation variationnelle : on cherche $u \in \mathcal{H}$ et



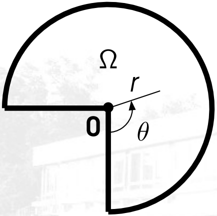

- Problème modèle :

$$\begin{cases} -\Delta u = f & \text{dans } \Omega, \\ u = 0 & \text{sur } \partial\Omega. \end{cases}$$

$$\mathcal{H} = H_0^1(\Omega) = \{u \in H^1(\Omega)\ ;\ u = 0 \text{ sur } \partial\Omega\}.$$

- Formulation variationnelle : on cherche $u \in \mathcal{H}$ et

$$-\Delta u = f$$



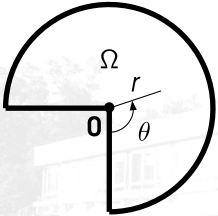

- Problème modèle :

$$\left\{\begin{array}{rcll} -\Delta u & = & f & \text{dans } \Omega, \\ u & = & 0 & \text{sur } \partial\Omega. \end{array}\right.$$

$$\mathcal{H} = \mathrm{H}_0^1(\Omega) = \{u \in \mathrm{H}^1(\Omega)\ ;\ u = 0 \text{ sur } \partial\Omega\}.$$

- Formulation variationnelle : on cherche $u \in \mathcal{H}$ et

$$\forall v \in \mathcal{H} \qquad -\Delta u\, v = f\, v$$



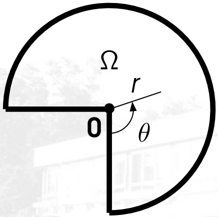

- Problème modèle :

$$\begin{cases} -\Delta u &= f \quad \text{dans } \Omega, \\ u &= 0 \quad \text{sur } \partial\Omega. \end{cases}$$

$$\mathcal{H} = \mathrm{H}^1_0(\Omega) = \{u \in \mathrm{H}^1(\Omega)\ ;\ u = 0 \text{ sur } \partial\Omega\}.$$

- Formulation variationnelle : on cherche $u \in \mathcal{H}$ et

$$\forall v \in \mathcal{H} \quad -\int_\Omega \Delta u\, v = \int_\Omega f\, v$$



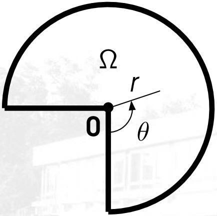

- **Problème modèle :**

$$\left\{\begin{array}{rcll} -\Delta u & = & f & \text{dans } \Omega, \\ u & = & 0 & \text{sur } \partial\Omega. \end{array}\right.$$

$$\mathcal{H} = \mathrm{H}^1_0(\Omega) = \{u \in \mathrm{H}^1(\Omega)\ ;\ u = 0 \text{ sur } \partial\Omega\}.$$

- **Formulation variationnelle** : on cherche $u \in \mathcal{H}$ et

$$\forall v \in \mathcal{H} \qquad -\int_{\partial\Omega} \partial_\nu u\, v + \int_\Omega \nabla u \cdot \nabla v = \int_\Omega f\, v$$



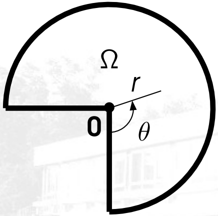

- Problème modèle :

$$\left\{\begin{array}{rcll} -\Delta u & = & f & \text{dans } \Omega, \\ u & = & 0 & \text{sur } \partial\Omega. \end{array}\right.$$

$$\mathcal{H} = H_0^1(\Omega) = \{u \in H^1(\Omega)\ ;\ u = 0 \text{ sur } \partial\Omega\}.$$

- Formulation variationnelle : on cherche $u \in \mathcal{H}$ et

$$\forall v \in \mathcal{H} \quad \int_\Omega \nabla u \cdot \nabla v = \int_\Omega f\, v \qquad \text{(P)}$$



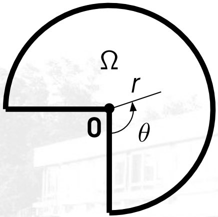

- Problème modèle :

$$\begin{cases} -\Delta u & = & f & \text{dans } \Omega, \\ u & = & 0 & \text{sur } \partial\Omega. \end{cases}$$

$$\mathcal{H} = \mathrm{H}_0^1(\Omega) = \{u \in \mathrm{H}^1(\Omega)\ ;\ u = 0 \text{ sur } \partial\Omega\}.$$

- Approximation de Galerkin : $\mathcal{H}_n \subset \mathcal{H}$ avec $\dim \mathcal{H}_n = n$.

$$\forall v_n \in \mathcal{H}_n \quad \int_\Omega \nabla u_n \cdot \nabla v_n = \int_\Omega f\, v_n \qquad (\mathrm{P}_n)$$




- Problème modèle :

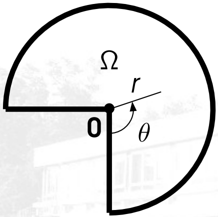
$$\begin{cases} -\Delta u = f & \text{dans } \Omega, \\ u = 0 & \text{sur } \partial\Omega. \end{cases}$$

$$\mathcal{H} = \mathrm{H}^1_0(\Omega) = \{u \in \mathrm{H}^1(\Omega)\ ;\ u = 0 \text{ sur } \partial\Omega\}.$$

- Approximation de Galerkin : $\mathcal{H}_n \subset \mathcal{H}$ avec $\dim \mathcal{H}_n = n$.

$$\forall v_n \in \mathcal{H}_n \quad \int_\Omega \nabla u_n \cdot \nabla v_n = \int_\Omega f\, v_n \qquad (\mathrm{P}_n)$$

- $(\mathrm{P}_n)$ est un système linéaire $n \times n$ : si $u_n = \sum_{j=1}^{n} \alpha_j \phi_j$.




- Problème modèle :

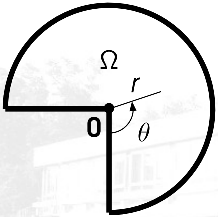
$$\begin{cases} -\Delta u &= f \quad \text{dans } \Omega, \\ u &= 0 \quad \text{sur } \partial\Omega. \end{cases}$$

$$\mathcal{H} = \mathrm{H}_0^1(\Omega) = \{u \in \mathrm{H}^1(\Omega) \; ; \; u = 0 \text{ sur } \partial\Omega\}.$$

- Approximation de Galerkin : $\mathcal{H}_n \subset \mathcal{H}$ avec $\dim \mathcal{H}_n = n$.

$$\forall v_n \in \mathcal{H}_n \quad \sum_{j=1}^{n} \alpha_j \int_\Omega \nabla\phi_j \cdot \nabla v_n = \int_\Omega f \, v_n$$

- $(\mathrm{P}_n)$ est un système linéaire $n \times n$ : si $u_n = \sum_{j=1}^{n} \alpha_j \phi_j$.




- Problème modèle :

$$\left\{ \begin{array}{rcll} -\Delta u & = & f & \text{dans } \Omega, \\ u & = & 0 & \text{sur } \partial\Omega. \end{array} \right.$$

$$\mathcal{H} = \mathrm{H}^1_0(\Omega) = \{ u \in \mathrm{H}^1(\Omega) \; ; \; u = 0 \text{ sur } \partial\Omega \}.$$

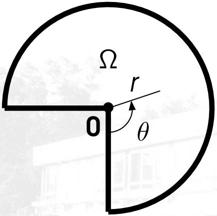
- Approximation de Galerkin : $\mathcal{H}_n \subset \mathcal{H}$ avec $\dim \mathcal{H}_n = n$.

$$\forall i = 1, \ldots, n, \quad \sum_{j=1}^{n} \alpha_j \int_\Omega \nabla\phi_j \cdot \nabla\phi_i = \int_\Omega f \, \phi_i$$

- $(\mathrm{P}_n)$ est un système linéaire $n \times n$ : si $u_n = \sum_{j=1}^{n} \alpha_j \phi_j$.

# Mathématiques pour la mécanique de la rupture

## Enjeux numériques




- Problème modèle :

$$\left\{\begin{array}{rcll} -\Delta u & = & f & \text{dans } \Omega, \\ u & = & 0 & \text{sur } \partial\Omega. \end{array}\right.$$

$$\mathcal{H} = \mathrm{H}^1_0(\Omega) = \{u \in \mathrm{H}^1(\Omega)\ ;\ u = 0 \text{ sur } \partial\Omega\}.$$

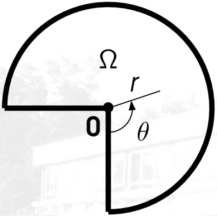
- Approximation de Galerkin : $\mathcal{H}_n \subset \mathcal{H}$ avec $\dim \mathcal{H}_n = n$.

$$\forall i = 1, \ldots, n, \quad \sum_{j=1}^{n} \alpha_j \mathbb{K}_{ij} = \int_\Omega f\,\phi_i$$

  - $(\mathrm{P}_n)$ est un système linéaire $n \times n$ : si $u_n = \sum_{j=1}^{n} \alpha_j \phi_j$.

# Mathématiques pour la mécanique de la rupture

## Enjeux numériques




- **Problème modèle :**

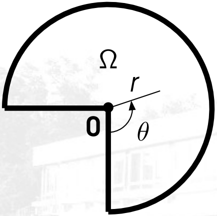
$$\begin{cases} -\Delta u = f & \text{dans } \Omega, \\ u = 0 & \text{sur } \partial\Omega. \end{cases}$$

$$\mathcal{H} = \mathrm{H}^1_0(\Omega) = \{u \in \mathrm{H}^1(\Omega)\ ;\ u = 0 \text{ sur } \partial\Omega\}.$$

- **Approximation de Galerkin** : $\mathcal{H}_n \subset \mathcal{H}$ avec $\dim \mathcal{H}_n = n$.

$$\forall i = 1, \dots, n, \quad \sum_{j=1}^{n} \alpha_j \mathbb{K}_{ij} = \mathbb{B}_i$$

  - $(\mathrm{P}_n)$ est un système linéaire $n \times n$ : si $u_n = \sum_{j=1}^{n} \alpha_j \phi_j$.




- Problème modèle :

$$\begin{cases} -\Delta u = f & \text{dans } \Omega, \\ u = 0 & \text{sur } \partial\Omega. \end{cases}$$

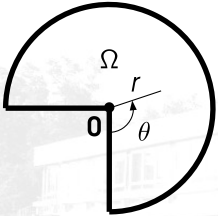
$$\mathcal{H} = \mathrm{H}^1_0(\Omega) = \{u \in \mathrm{H}^1(\Omega)\ ;\ u = 0 \text{ sur } \partial\Omega\}.$$

- Approximation de Galerkin : $\mathcal{H}_n \subset \mathcal{H}$ avec $\dim \mathcal{H}_n = n$.

$$\mathbb{K}\alpha = \mathbb{B}$$

  - $(\mathrm{P}_n)$ est un système linéaire $n \times n$ : si $u_n = \sum_{j=1}^{n} \alpha_j \phi_j$.

$$\mathbb{K}_{ij} = \int_\Omega \nabla\phi_j \cdot \nabla\phi_i \qquad \mathbb{B}_i = \int_\Omega f\phi_i.$$




- Problème modèle :

$$\left\{\begin{array}{rcll} -\Delta u & = & f & \text{dans } \Omega, \\ u & = & 0 & \text{sur } \partial\Omega. \end{array}\right.$$

$$\mathcal{H} = \mathrm{H}_0^1(\Omega) = \{u \in \mathrm{H}^1(\Omega)\ ;\ u = 0 \text{ sur } \partial\Omega\}.$$

- Approximation de Galerkin : $\mathcal{H}_n \subset \mathcal{H}$ avec $\dim \mathcal{H}_n = n$.

$$\mathbb{K}\alpha = \mathbb{B}$$

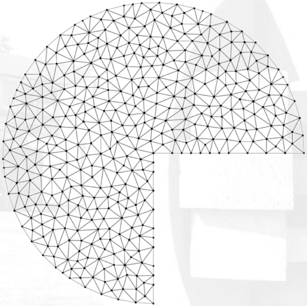
  - ($\mathrm{P}_n$) est un système linéaire $n \times n$ : si $u_n = \sum_{j=1}^{n} \alpha_j \phi_j$.

$$\mathbb{K}_{ij} = \int_\Omega \nabla\phi_j \cdot \nabla\phi_i \qquad \mathbb{B}_i = \int_\Omega f\phi_i.$$

  - **Comment choisir $\mathcal{H}_n$ et la base $(\phi_j)$ ?**

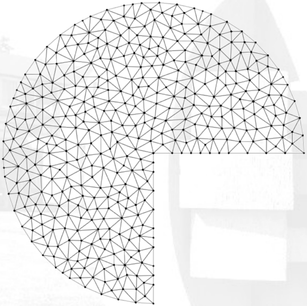
- **Méthodes des éléments finis**

- **Méthodes des éléments finis**
  - Maillage du domaine



- **Méthodes des éléments finis**
  - Maillage du domaine
  - Triangulation $\mathcal{T}_n$ :

$$\overline{\Omega} = \bigcup_{K \in \mathcal{T}_n} K$$

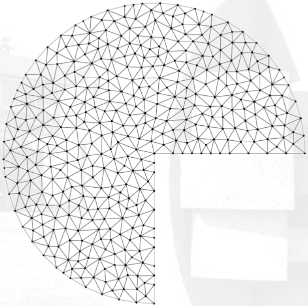


- **Méthodes des éléments finis**
  - Maillage du domaine
  - Triangulation $\mathcal{T}_n$ :

$$\overline{\Omega} = \bigcup_{K \in \mathcal{T}_n} K$$

  - Si $K \neq L$,

$$K \cap L = \text{arête ou sommet.}$$

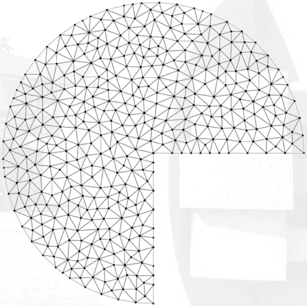


- **Méthodes des éléments finis**
  - Maillage du domaine
  - Triangulation $\mathcal{T}_n$ :

$$\overline{\Omega} = \bigcup_{K \in \mathcal{T}_n} K$$

  - Si $K \neq L$,

$K \cap L =$ arête ou sommet.



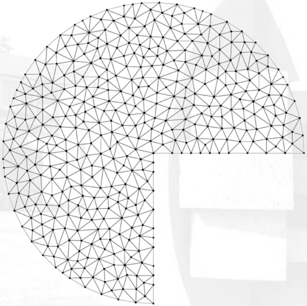
- Espace d'approximation et fonctions de base

- **Méthodes des éléments finis**
  - Maillage du domaine
  - Triangulation $\mathcal{T}_n$ :

$$\overline{\Omega} = \bigcup_{K \in \mathcal{T}_n} K$$

  - Si $K \neq L$,

$$K \cap L = \text{arête ou sommet.}$$



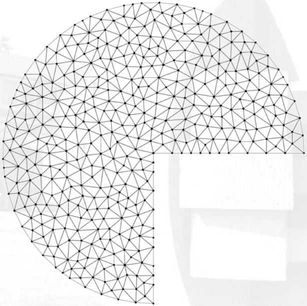
- Espace d'approximation et fonctions de base
  - $\mathcal{H}_n = \left\{ v \in \mathscr{C}(\overline{\Omega})\ ;\ \forall K \in \mathcal{T}_n,\ v|_K \in \mathbb{P}_1 \right\}.$

- **Méthodes des éléments finis**
  - Maillage du domaine
  - Triangulation $\mathcal{T}_n$ :

$$\overline{\Omega} = \bigcup_{K \in \mathcal{T}_n} K$$

  - Si $K \neq L$,

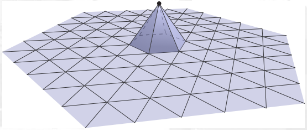
$$K \cap L = \text{arête ou sommet.}$$



- Espace d'approximation et fonctions de base
  - $\mathcal{H}_n = \left\{ v \in \mathscr{C}(\overline{\Omega})\ ;\ \forall K \in \mathcal{T}_n,\ v|_K \in \mathbb{P}_1 \right\}$.
  - $\forall s_i$ sommet de $\mathcal{T}_n$, $\phi_i(s_j) = \delta_{ij}$.

- **Méthodes des éléments finis**
  - Maillage du domaine
  - Triangulation $\mathcal{T}_n$ :

$$\overline{\Omega} = \bigcup_{K \in \mathcal{T}_n} K$$



  - Si $K \neq L$,

$$K \cap L = \text{arête ou sommet.}$$

- Espace d'approximation et fonctions de base
  - $\mathcal{H}_n = \left\{ v \in \mathscr{C}(\overline{\Omega}) \; ; \; \forall K \in \mathcal{T}_n, \; v|_K \in \mathbb{P}_1 \right\}$.
  - $\forall s_i$ sommet de $\mathcal{T}_n$, $\phi_i(s_j) = \delta_{ij}$.

- Estimations d’erreur (cas régulier)

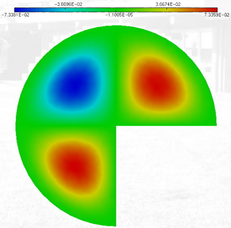
- Estimations d'erreur (cas régulier)

**Théorème.** Si $u \in \mathrm{H}^2(\Omega)$, alors

$$\|u - u_n\|_{\mathrm{H}^1(\Omega)} \leq C\,h\,\|f\|_{\mathrm{L}^2(\Omega)}.$$

- Estimations d'erreur (cas régulier)

> **Théorème.** Si $u \in \mathrm{H}^2(\Omega)$, alors
> $$\|u - u_n\|_{\mathrm{H}^1(\Omega)} \leq C\, h \, \|f\|_{\mathrm{L}^2(\Omega)}.$$

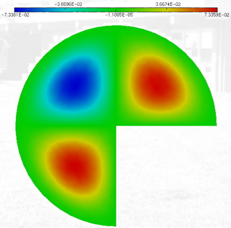



$u$

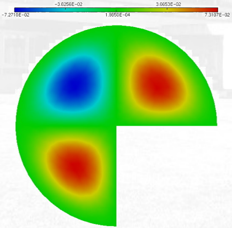
Calculs pour $h \simeq 0.01$

- Estimations d'erreur (cas régulier)

> **Théorème.** Si $u \in \mathrm{H}^2(\Omega)$, alors
> $$\|u - u_h\|_{\mathrm{H}^1(\Omega)} \leq C\,h\,\|f\|_{\mathrm{L}^2(\Omega)}.$$




$u$

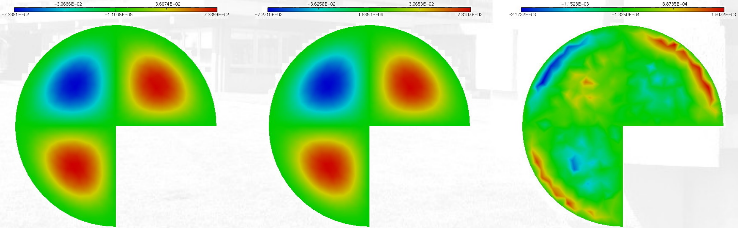



$u_h$

Calculs pour $h \simeq 0.01$

- Estimations d'erreur (cas régulier)

> **Théorème.** Si $u \in \mathrm{H}^2(\Omega)$, alors
> $$\|u - u_n\|_{\mathrm{H}^1(\Omega)} \leq C\,h\,\|f\|_{\mathrm{L}^2(\Omega)}.$$

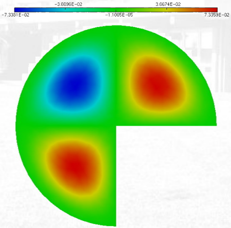


$u$ $\quad$ $u_n$ $\quad$ $u - u_n$

Calculs pour $h \simeq 0.01$ – $\|u - u_n\|_{\mathrm{H}^1(\Omega)} \simeq 9 \cdot 10^{-4}$

- Estimations d'erreur (cas régulier)

> **Théorème.** Si $u \in \mathrm{H}^2(\Omega)$, alors
> $$\|u - u_n\|_{\mathrm{H}^1(\Omega)} \leq C\, h\, \|f\|_{\mathrm{L}^2(\Omega)}.$$

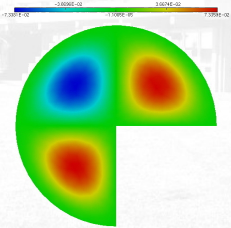


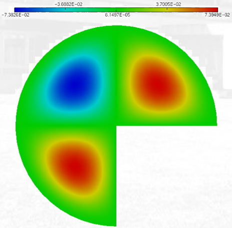

$u$ $\qquad$ $u_n$ $\qquad$ $u - u_n$

Calculs pour $h \simeq 0.004$

- Estimations d'erreur (cas régulier)

> **Théorème.** Si $u \in \mathrm{H}^2(\Omega)$, alors
> $$\|u - u_h\|_{\mathrm{H}^1(\Omega)} \leq C\, h\, \|f\|_{\mathrm{L}^2(\Omega)}.$$



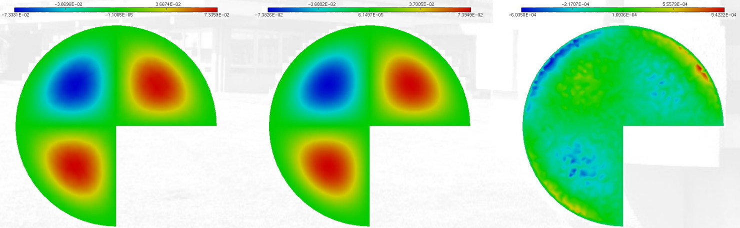




$u$ $\qquad$ $u_h$ $\qquad$ $u - u_h$

Calculs pour $h \simeq 0.004$

- Estimations d'erreur (cas régulier)

> **Théorème.** Si $u \in H^2(\Omega)$, alors
> $$\|u - u_h\|_{H^1(\Omega)} \leq C\, h\, \|f\|_{L^2(\Omega)}.$$

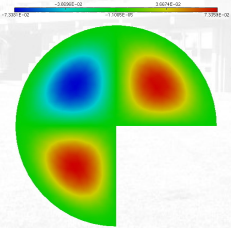



$u$ $\qquad$ $u_h$ $\qquad$ $u - u_h$

Calculs pour $h \simeq 0.004$ – $\|u - u_h\|_{H^1(\Omega)} \simeq 2.7 \cdot 10^{-4}$

- Estimations d'erreur (cas régulier)

> **Théorème.** Si $u \in \mathrm{H}^2(\Omega)$, alors
> $$\|u - u_h\|_{\mathrm{H}^1(\Omega)} \leq C\, h\, \|f\|_{\mathrm{L}^2(\Omega)}.$$

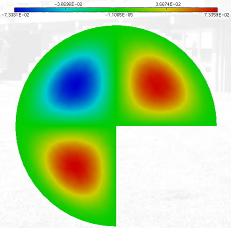



$u$ $\qquad\qquad$ $u_h$ $\qquad\qquad$ $u - u_h$

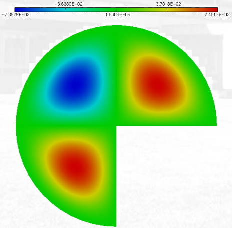
Calculs pour $h \simeq 0.001$

- Estimations d'erreur (cas régulier)

> **Théorème.** Si $u \in \mathrm{H}^2(\Omega)$, alors
> $$\|u - u_n\|_{\mathrm{H}^1(\Omega)} \leq C\,h\,\|f\|_{\mathrm{L}^2(\Omega)}.$$




$u$



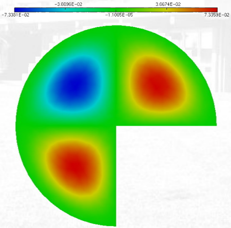

$u_n$

$u - u_n$

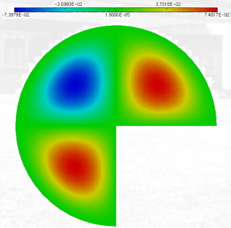
Calculs pour $h \simeq 0.001$

- Estimations d'erreur (cas régulier)

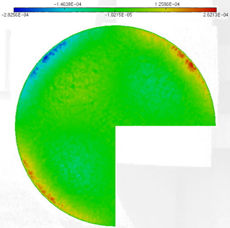
> **Théorème.** Si $u \in \mathrm{H}^2(\Omega)$, alors
> $$\|u - u_h\|_{\mathrm{H}^1(\Omega)} \leq C\, h\, \|f\|_{\mathrm{L}^2(\Omega)}.$$




$u$




$u_h$




$u - u_h$

Calculs pour $h \simeq 0.001$ – $\|u - u_h\|_{\mathrm{H}^1(\Omega)} \simeq 8 \cdot 10^{-5}$

# Mathématiques pour la mécanique de la rupture

## Enjeux numériques

- Estimations d'erreur (cas singulier)

- Estimations d'erreur (cas singulier)

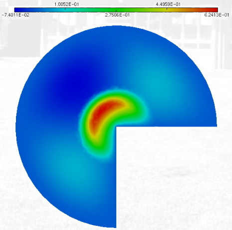
**Théorème.** Dans le cas d'un secteur d'angle $\omega$, on a en général

$$\|u - u_n\|_{H^1(\Omega)} \leq C\, h^{\alpha}\, \|f\|_{L^2(\Omega)}.$$

avec $\alpha = \frac{\pi}{\omega}$.

- Estimations d'erreur (cas singulier)

> **Théorème.** Dans le cas d'un secteur d'angle $\omega$, on a en général
> $$\|u - u_h\|_{H^1(\Omega)} \leq C\, h^{\alpha}\, \|f\|_{L^2(\Omega)}.$$
> avec $\alpha = \frac{\pi}{\omega}$.

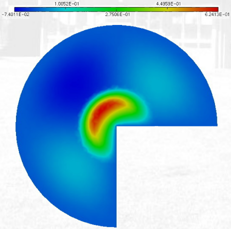



$u$

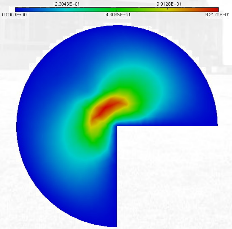
Calculs pour $h \simeq 0.01$

- Estimations d'erreur (cas singulier)

> **Théorème.** Dans le cas d'un secteur d'angle $\omega$, on a en général
> $$\|u - u_h\|_{H^1(\Omega)} \leq C\, h^{\alpha}\, \|f\|_{L^2(\Omega)}.$$
> avec $\alpha = \frac{\pi}{\omega}$.




$u$

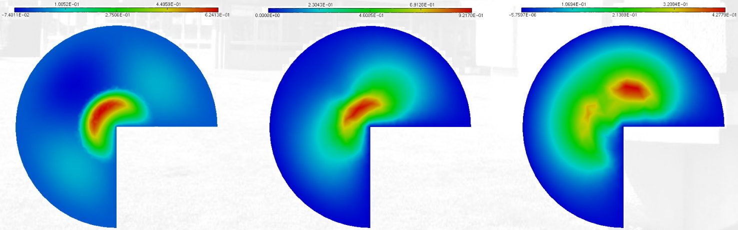



$u_h$

Calculs pour $h \simeq 0.01$

- Estimations d'erreur (cas singulier)

> **Théorème.** Dans le cas d'un secteur d'angle $\omega$, on a en général
> $$\|u - u_h\|_{H^1(\Omega)} \leq C\, h^\alpha\, \|f\|_{L^2(\Omega)}.$$
> avec $\alpha = \frac{\pi}{\omega}$.

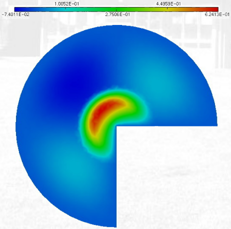


$u$ $\qquad$ $u_h$ $\qquad$ $u - u_h$

Calculs pour $h \simeq 0.01$ – $\|u - u_h\|_{H^1(\Omega)} \simeq 0.22$

- Estimations d'erreur (cas singulier)

> **Théorème.** Dans le cas d'un secteur d'angle $\omega$, on a en général
>
> $$\|u - u_n\|_{H^1(\Omega)} \leq C\, h^{\alpha}\, \|f\|_{L^2(\Omega)}.$$
>
> avec $\alpha = \frac{\pi}{\omega}$.

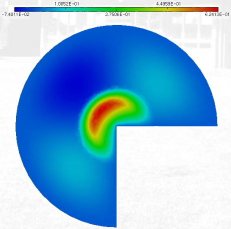


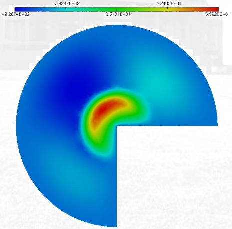

$u$ $u_n$ $u - u_n$

Calculs pour $h \simeq 0.004$

- Estimations d'erreur (cas singulier)

> **Théorème.** Dans le cas d'un secteur d'angle $\omega$, on a en général
> $$\|u - u_h\|_{H^1(\Omega)} \leq C\, h^{\alpha}\, \|f\|_{L^2(\Omega)}.$$
> avec $\alpha = \frac{\pi}{\omega}$.




$u$ | $u_h$ | $u - u_h$

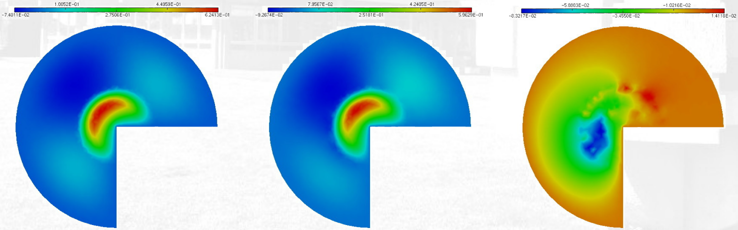
Calculs pour $h \simeq 0.004$

- Estimations d'erreur (cas singulier)

**Théorème.** Dans le cas d'un secteur d'angle $\omega$, on a en général

$$\|u - u_h\|_{H^1(\Omega)} \le C\, h^{\alpha}\, \|f\|_{L^2(\Omega)}.$$

avec $\alpha = \frac{\pi}{\omega}$.

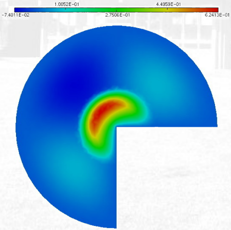



$u$ $\quad$ $u_h$ $\quad$ $u - u_h$

Calculs pour $h \simeq 0.004$ – $\|u - u_h\|_{H^1(\Omega)} \simeq 3.3 \cdot 10^{-2}$

- Estimations d'erreur (cas singulier)

> **Théorème.** Dans le cas d'un secteur d'angle $\omega$, on a en général
> $$\|u - u_h\|_{H^1(\Omega)} \leq C\, h^{\alpha}\, \|f\|_{L^2(\Omega)}.$$
> avec $\alpha = \frac{\pi}{\omega}$.

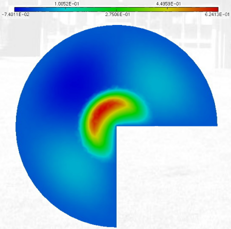



$u$ $\qquad$ $u_h$ $\qquad$ $u - u_h$

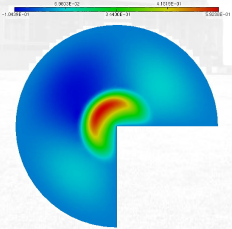
Calculs pour $h \simeq 0.001$

- Estimations d'erreur (cas singulier)

> **Théorème.** Dans le cas d'un secteur d'angle $\omega$, on a en général
>
> $$\|u - u_n\|_{H^1(\Omega)} \leq C\, h^{\alpha}\, \|f\|_{L^2(\Omega)}.$$
>
> avec $\alpha = \frac{\pi}{\omega}$.




$u$



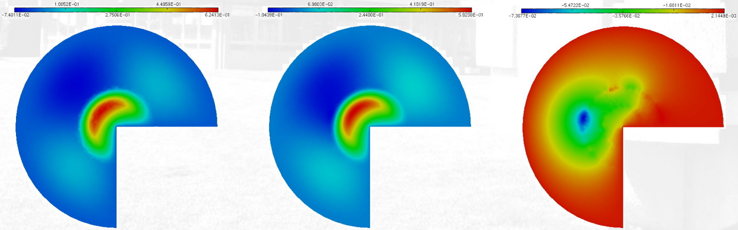

$u_n$

$u - u_n$

Calculs pour $h \simeq 0.001$

- Estimations d'erreur (cas singulier)

> **Théorème.** Dans le cas d'un secteur d'angle $\omega$, on a en général
> $$\|u - u_n\|_{H^1(\Omega)} \leq C\, h^{\alpha}\, \|f\|_{L^2(\Omega)}.$$
> avec $\alpha = \frac{\pi}{\omega}$.




$u$ $\qquad$ $u_n$ $\qquad$ $u - u_n$

Calculs pour $h \simeq 0.001$ – $\|u - u_n\|_{H^1(\Omega)} \simeq 2.6 \cdot 10^{-2}$

**Théorème.** Si $u \in \mathrm{H}^2(\Omega)$, alors

$$\|u - u_n\|_{\mathrm{H}^1(\Omega)} \leq C\, h \|f\|_{\mathrm{L}^2(\Omega)}.$$

**Théorème.** Dans le cas d'un secteur d'angle $\omega$, on a en général

$$\|u - u_n\|_{\mathrm{H}^1(\Omega)} \leq C\, h^{\alpha} \, \|f\|_{\mathrm{L}^2(\Omega)}.$$

avec $\alpha = \frac{\pi}{\omega}$.

**Théorème.** Si $u \in \mathrm{H}^2(\Omega)$, alors

$$\|u - u_n\|_{\mathrm{H}^1(\Omega)} \leq C\, h \|f\|_{\mathrm{L}^2(\Omega)}.$$

**Théorème.** Dans le cas d'un secteur d'angle $\omega$, on a en général

$$\|u - u_n\|_{\mathrm{H}^1(\Omega)} \leq C\, h^\alpha \, \|f\|_{\mathrm{L}^2(\Omega)}.$$

avec $\alpha = \frac{\pi}{\omega}$.

- But = construire des méthodes pour pallier ce défaut.

**Théorème.** Si $u \in \mathrm{H}^2(\Omega)$, alors

$$\|u - u_h\|_{\mathrm{H}^1(\Omega)} \leq C\, h \|f\|_{\mathrm{L}^2(\Omega)}.$$

**Théorème.** Dans le cas d'un secteur d'angle $\omega$, on a en général

$$\|u - u_h\|_{\mathrm{H}^1(\Omega)} \leq C\, h^{\alpha} \|f\|_{\mathrm{L}^2(\Omega)}.$$

avec $\alpha = \frac{\pi}{\omega}$.

- But = construire des méthodes pour pallier ce défaut.
  - Méthodes de raffinement de maillage.

**Théorème.** Si $u \in \mathrm{H}^2(\Omega)$, alors

$$\|u - u_n\|_{\mathrm{H}^1(\Omega)} \leq C\, h \|f\|_{\mathrm{L}^2(\Omega)}.$$

**Théorème.** Dans le cas d'un secteur d'angle $\omega$, on a en général

$$\|u - u_n\|_{\mathrm{H}^1(\Omega)} \leq C\, h^{\alpha} \|f\|_{\mathrm{L}^2(\Omega)}.$$

avec $\alpha = \frac{\pi}{\omega}$.

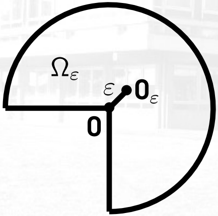
- But = construire des méthodes pour pallier ce défaut.
  - Méthodes de raffinement de maillage.
  - Méthodes d'adjonction de singularité.

# Mathématiques pour la mécanique de la rupture

## Initiation des fissures

- Comment calculer le SIF pour des petites fissures ?

- Comment calculer le SIF pour des petites fissures ?
- Problème modèle :



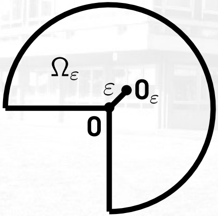

$$\begin{cases} -\Delta u^\varepsilon(\mathbf{x}) = f(\mathbf{x}) & \text{dans } \Omega_\varepsilon, \\ u^\varepsilon(\mathbf{x}) = 0 & \text{sur } \partial\Omega_\varepsilon \end{cases}$$

Pour $\varepsilon > 0$,

$$u^\varepsilon(\mathbf{x}) = u^\varepsilon_{\text{reg}} + \lambda_\varepsilon \sqrt{r_\varepsilon} \sin\left(\frac{\theta_\varepsilon}{2}\right).$$

- Comment calculer le SIF pour des petites fissures ?

- Problème modèle :




$$\begin{cases} -\Delta u^\varepsilon(\mathbf{x}) = f(\mathbf{x}) & \text{dans } \Omega_\varepsilon, \\ u^\varepsilon(\mathbf{x}) = 0 & \text{sur } \partial\Omega_\varepsilon \end{cases}$$

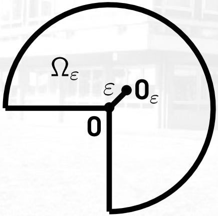
Pour $\varepsilon > 0$,

$$u^\varepsilon(\mathbf{x}) = u^\varepsilon_{\text{reg}} + \lambda_\varepsilon \sqrt{r_\varepsilon} \sin\left(\frac{\theta_\varepsilon}{2}\right).$$

**Question.** Asymptotique de $\lambda_\varepsilon$ pour $\varepsilon \to 0$ ?

- Comment calculer le SIF pour des petites fissures ?

- Problème modèle :




$$\begin{cases} -\Delta u^\varepsilon(\mathbf{x}) &= f(\mathbf{x}) \quad \text{dans } \Omega_\varepsilon, \\ u^\varepsilon(\mathbf{x}) &= 0 \quad \text{sur } \partial\Omega_\varepsilon \end{cases}$$

Pour $\varepsilon > 0$,

$$u^\varepsilon(\mathbf{x}) = u^\varepsilon_{\text{reg}} + \lambda_\varepsilon \sqrt{r_\varepsilon} \sin\left(\frac{\theta_\varepsilon}{2}\right).$$

**Question.** Asymptotique de $\lambda_\varepsilon$ pour $\varepsilon \to 0$ ?

- Méthode : construire un développement asymptotique de $u^\varepsilon$.

- Développement asymptotique

$$u^{\varepsilon}(\mathbf{x}) \simeq u^{0}(\mathbf{x}) + c\,\varepsilon^{\frac{2}{3}}\,K\left(\frac{\mathbf{x}}{\varepsilon}\right),$$

- Développement asymptotique

$$u^{\varepsilon}(\mathbf{x}) \simeq u^{0}(\mathbf{x}) + c\,\varepsilon^{\frac{2}{3}}\,K\left(\frac{\mathbf{x}}{\varepsilon}\right),$$

où $K$ résout

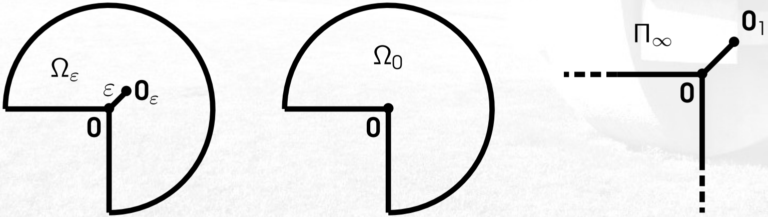
$$\begin{cases} -\Delta K(\mathcal{X}) & = & 0 & \text{dans } \Pi_{\infty}, \\ K(\mathcal{X}) & = & |\mathcal{X}|^{\frac{2}{3}} \sin\left(\frac{2\theta}{3}\right) & \text{sur } \partial\Pi_{\infty}. \end{cases}$$

- Développement asymptotique

$$u^\varepsilon(\mathbf{x}) \simeq u^0(\mathbf{x}) + c\,\varepsilon^{\frac{2}{3}}\,K\left(\frac{\mathbf{x}}{\varepsilon}\right),$$

où $K$ résout

$$\begin{cases} -\Delta K(\mathcal{X}) & = & 0 & \text{dans } \Pi_\infty, \\ K(\mathcal{X}) & = & |\mathcal{X}|^{\frac{2}{3}} \sin\left(\frac{2\theta}{3}\right) & \text{sur } \partial\Pi_\infty. \end{cases}$$



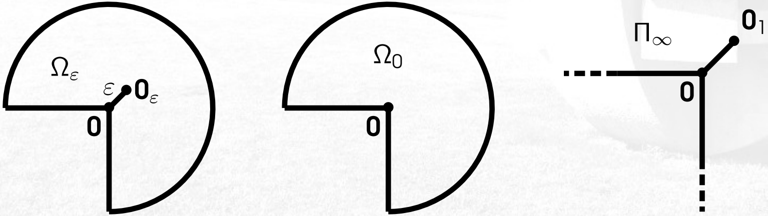
- Développement asymptotique

$$u^\varepsilon(\mathbf{x}) \simeq u^0(\mathbf{x}) + c\,\varepsilon^{\frac{2}{3}}\, K\left(\frac{\mathbf{x}}{\varepsilon}\right),$$

où $K$ résout

$$\left\{\begin{array}{rcll} -\Delta K(\mathcal{X}) & = & 0 & \text{dans } \Pi_\infty, \\ K(\mathcal{X}) & = & |\mathcal{X}|^{\frac{2}{3}} \sin\left(\frac{2\theta}{3}\right) & \text{sur } \partial\Pi_\infty. \end{array}\right.$$

$$K(\mathcal{X}) \underset{\mathcal{X}=\mathbf{0}_1}{\simeq} b\sqrt{|\mathcal{X}-\mathbf{0}_1|}\,\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)$$



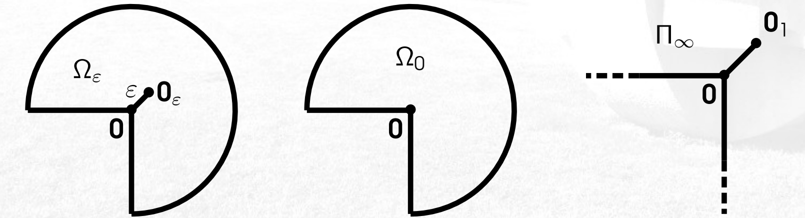
- Développement asymptotique

$$u^{\varepsilon}(\mathbf{x}) \simeq u^{0}(\mathbf{x}) + c\, b\, \varepsilon^{\frac{2}{3}} \sqrt{\left|\frac{\mathbf{x}}{\varepsilon} - \mathbf{0}_1\right|}\, \sin\left(\frac{\theta_1}{2}\right),$$

où $K$ résout

$$\left\{\begin{array}{rcll} -\Delta K(\mathcal{X}) & = & 0 & \text{dans } \Pi_\infty, \\ K(\mathcal{X}) & = & |\mathcal{X}|^{\frac{2}{3}} \sin\left(\frac{2\theta}{3}\right) & \text{sur } \partial\Pi_\infty. \end{array}\right.$$

$$K(\mathcal{X}) \underset{\mathcal{X}=\mathbf{0}_1}{\simeq} b \sqrt{|\mathcal{X} - \mathbf{0}_1|}\, \sin\left(\frac{\theta}{2}\right)$$

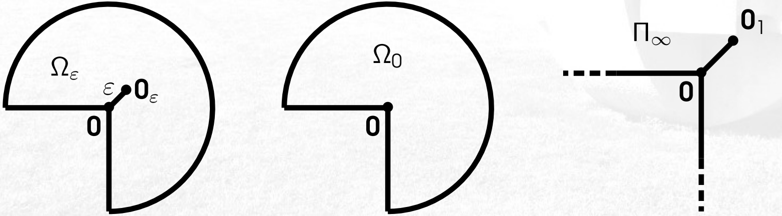


- Développement asymptotique

$$u^\varepsilon(\mathbf{x}) \simeq u^0(\mathbf{x}) + c\, b\, \varepsilon^{\frac{2}{3}} \sqrt{\left|\frac{\mathbf{x}}{\varepsilon} - \frac{\mathbf{0}_\varepsilon}{\varepsilon}\right|} \sin\left(\frac{\theta_1}{2}\right),$$

où $K$ résout

$$\left\{\begin{array}{rcll} -\Delta K(\mathcal{X}) & = & 0 & \text{dans } \Pi_\infty, \\ K(\mathcal{X}) & = & |\mathcal{X}|^{\frac{2}{3}} \sin\left(\frac{2\theta}{3}\right) & \text{sur } \partial\Pi_\infty. \end{array}\right. \qquad K(\mathcal{X}) \underset{\mathcal{X}=\mathbf{0}_1}{\simeq} b \sqrt{|\mathcal{X} - \mathbf{0}_1|} \sin\left(\frac{\theta}{2}\right)$$



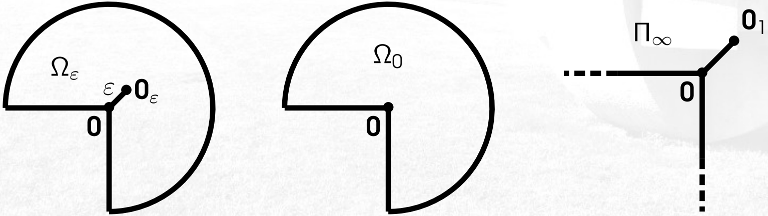
- Développement asymptotique

$$u^{\varepsilon}(\mathbf{x}) \simeq u^{0}(\mathbf{x}) + c\,b\,\varepsilon^{\frac{2}{3}-\frac{1}{2}}\sqrt{|\mathbf{x}-\mathbf{0}_{\varepsilon}|}\sin\left(\frac{\theta_{\varepsilon}}{2}\right),$$

où $K$ résout

$$\begin{cases} -\Delta K(\mathcal{X}) & = & 0 & \text{dans } \Pi_{\infty}, \\ K(\mathcal{X}) & = & |\mathcal{X}|^{\frac{2}{3}}\sin\left(\frac{2\theta}{3}\right) & \text{sur } \partial\Pi_{\infty}. \end{cases}$$

$$K(\mathcal{X}) \underset{\mathcal{X}=\mathbf{0}_1}{\simeq} b\sqrt{|\mathcal{X}-\mathbf{0}_1|}\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)$$

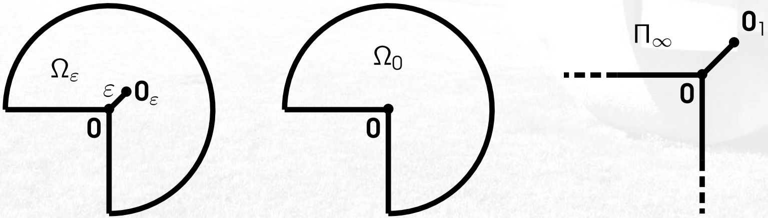


- Développement asymptotique

$$u^{\varepsilon}(\mathbf{x}) \simeq u^{0}(\mathbf{x}) + c\, b\, \varepsilon^{\frac{1}{6}} \sqrt{|\mathbf{x}-\mathbf{0}_{\varepsilon}|}\, \sin\left(\frac{\theta_{\varepsilon}}{2}\right),$$

où $K$ résout

$$\left\{\begin{array}{rcll} -\Delta K(\mathcal{X}) & = & 0 & \text{dans } \Pi_{\infty}, \\ K(\mathcal{X}) & = & |\mathcal{X}|^{\frac{2}{3}} \sin\left(\frac{2\theta}{3}\right) & \text{sur } \partial\Pi_{\infty}. \end{array}\right. \qquad K(\mathcal{X}) \underset{\mathcal{X}=\mathbf{0}_1}{\simeq} b\,\sqrt{|\mathcal{X}-\mathbf{0}_1|}\,\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)$$



- Développement asymptotique (vis-à-vis de $\varepsilon$)

$$u^{\varepsilon}(\mathbf{x}) \simeq u^{0}(\mathbf{x}) + c\, b\, \varepsilon^{\frac{1}{6}} \sqrt{|\mathbf{x} - \mathbf{0}_{\varepsilon}|} \sin\left(\frac{\theta_{\varepsilon}}{2}\right).$$

- Développement asymptotique (vis-à-vis de $\varepsilon$)

$$u^\varepsilon(\mathbf{x}) \simeq u^0(\mathbf{x}) + c\,b\,\varepsilon^{\frac{1}{6}}\sqrt{|\mathbf{x}-\mathbf{0}_\varepsilon|}\sin\left(\frac{\theta_\varepsilon}{2}\right).$$

- Décomposition au voisinage de $\mathbf{0}_\varepsilon$

$$u^\varepsilon(\mathbf{x}) \simeq u^\varepsilon_{\text{reg}} + \lambda_\varepsilon\sqrt{|\mathbf{x}-\mathbf{0}_\varepsilon|}\sin\left(\frac{\theta_\varepsilon}{2}\right).$$

- Développement asymptotique (vis-à-vis de $\varepsilon$)

$$u^\varepsilon(\mathbf{x}) \simeq u^0(\mathbf{x}) + c\, b\, \varepsilon^{\frac{1}{6}} \sqrt{|\mathbf{x} - \mathbf{0}_\varepsilon|} \sin\left(\frac{\theta_\varepsilon}{2}\right).$$

- Décomposition au voisinage de $\mathbf{0}_\varepsilon$

$$u^\varepsilon(\mathbf{x}) \simeq u^\varepsilon_{\text{reg}} + \lambda_\varepsilon \sqrt{|\mathbf{x} - \mathbf{0}_\varepsilon|} \sin\left(\frac{\theta_\varepsilon}{2}\right).$$

- D'où l'asymptotique

$$\boxed{\lambda_\varepsilon = c\, b\, \varepsilon^{\frac{1}{6}}.}$$

- Développement asymptotique (vis-à-vis de $\varepsilon$)

$$u^\varepsilon(\mathbf{x}) \simeq u^0(\mathbf{x}) + c\, b\, \varepsilon^{\frac{1}{6}} \sqrt{|\mathbf{x} - \mathbf{0}_\varepsilon|} \sin\left(\frac{\theta_\varepsilon}{2}\right).$$

- Décomposition au voisinage de $\mathbf{0}_\varepsilon$

$$u^\varepsilon(\mathbf{x}) \simeq u^\varepsilon_{\text{reg}} + \lambda_\varepsilon \sqrt{|\mathbf{x} - \mathbf{0}_\varepsilon|} \sin\left(\frac{\theta_\varepsilon}{2}\right).$$

- D'où l'asymptotique

$$\boxed{\lambda_\varepsilon = c\, b\, \varepsilon^{\frac{1}{6}}.}$$

En particulier $\lambda_\varepsilon \to 0$ lorsque $\varepsilon \to 0$.

- Développement asymptotique (vis-à-vis de $\varepsilon$)

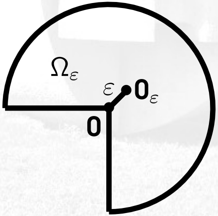
$$u^\varepsilon(\mathbf{x}) \simeq u^0(\mathbf{x}) + c\, b\, \varepsilon^{\frac{1}{6}} \sqrt{|\mathbf{x} - \mathbf{0}_\varepsilon|} \sin\left(\frac{\theta_\varepsilon}{2}\right).$$

- Décomposition au voisinage de $\mathbf{0}_\varepsilon$

$$u^\varepsilon(\mathbf{x}) \simeq u^\varepsilon_{\mathrm{reg}} + \lambda_\varepsilon \sqrt{|\mathbf{x} - \mathbf{0}_\varepsilon|} \sin\left(\frac{\theta_\varepsilon}{2}\right).$$

- D'où l'asymptotique

$$\boxed{\lambda_\varepsilon = c\, b\, \varepsilon^{\frac{1}{6}}.}$$




En particulier $\lambda_\varepsilon \to 0$ lorsque $\varepsilon \to 0$.

## Plan du cours

**Plan du cours**

- Cours 1 : régularité/singularités des problèmes elliptiques

## Plan du cours

- Cours 1 : régularité/singularités des problèmes elliptiques
- Cours 2 : Méthodes numériques

## Plan du cours

- Cours 1 : régularité/singularités des problèmes elliptiques
- Cours 2 : Méthodes numériques
- Cours 3 : études asymptotiques

**Plan du cours**

- Cours 1 : régularité/singularités des problèmes elliptiques
- Cours 2 : Méthodes numériques
- Cours 3 : études asymptotiques

**Exercices**

**Plan du cours**

- Cours 1 : régularité/singularités des problèmes elliptiques
- Cours 2 : Méthodes numériques
- Cours 3 : études asymptotiques

**Exercices**

- Calcul de singularités et d'asymptotiques.

**Plan du cours**

- Cours 1 : régularité/singularités des problèmes elliptiques
- Cours 2 : Méthodes numériques
- Cours 3 : études asymptotiques

**Exercices**

- Calcul de singularités et d'asymptotiques.
- Simulations éléments finis.