Espaces L_p non commutatifs associés à des groupes discrets

Colloque Inter'Actions 2016

Ignacio VERGARA

Unité de Mathématiques Pures et Appliquées

ENS Lyon
26 mai 2016

Espaces L_p non commutatifs

Espaces L_p classiques		**Espaces L_p non commutatifs**
Espace mesurable $(\Omega, \mathcal{A})$	$\longleftrightarrow$	Algèbre de von Neumann $\mathcal{M} \subset \mathcal{B}(\mathcal{H})$
Mesure μ	$\longleftrightarrow$	Trace τ

Cas particulier : G groupe discret

$$\mathcal{M} = \mathcal{L}(G) \subset \mathcal{B}(\ell_2(G))$$

Espaces L_p non commutatifs

Espaces L_p classiques		**Espaces L_p non commutatifs**
Espace mesurable $(\Omega, \mathcal{A})$	$\longleftrightarrow$	Algèbre de von Neumann $\mathcal{M} \subset \mathcal{B}(\mathcal{H})$
Mesure μ	$\longleftrightarrow$	Trace τ

Cas particulier : G groupe discret

$$\mathcal{M} = \mathcal{L}(G) \subset \mathcal{B}(\ell_2(G))$$

Espaces L_p non commutatifs

Espaces L_p classiques		**Espaces L_p non commutatifs**
Espace mesurable $(\Omega, \mathcal{A})$	$\longleftrightarrow$	Algèbre de von Neumann $\mathcal{M} \subset \mathcal{B}(\mathcal{H})$
Mesure μ	$\longleftrightarrow$	Trace τ

Cas particulier : G groupe discret

$$\mathcal{M} = \mathcal{L}(G) \subset \mathcal{B}(\ell_2(G))$$

L'espace $\ell_2(G)$

Soit G un groupe discret.

$$\ell_2(G) = \left\{ x : G \to \mathbb{C} \;\middle|\; \sum_{s \in G} |x(s)|^2 < \infty \right\}.$$

C'est un espace de Hilbert avec

$$\langle x, y \rangle = \sum_{s \in G} x(s)\overline{y(s)},$$

$$\|x\|_{\ell_2} = \left(\sum_{s \in G} |x(s)|^2 \right)^{\frac{1}{2}}.$$

L'espace $\ell_2(G)$

Soit G un groupe discret.

$$\ell_2(G) = \left\{ x : G \to \mathbb{C} \;\middle|\; \sum_{s \in G} |x(s)|^2 < \infty \right\}.$$

C'est un espace de Hilbert avec

$$\langle x, y \rangle = \sum_{s \in G} x(s)\overline{y(s)},$$

$$\|x\|_{\ell_2} = \left(\sum_{s \in G} |x(s)|^2 \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Représentation régulière à gauche

Soit $\mathcal{B}(\ell_2(G))$ l'espace des opérateurs bornés sur $\ell_2(G)$, c'est-à-dire,

$$\mathcal{B}(\ell_2(G)) = \{f : \ell_2(G) \to \ell_2(G) \mid f \text{ linéaire continue}\}.$$

$$\|f\|_\infty := \|f\|_{\mathcal{B}(\ell_2(G))} = \sup_{\|x\|_{\ell_2}=1} \|f(x)\|_{\ell_2}.$$

La représentation régulière à gauche $\lambda : G \to \mathcal{B}(\ell_2(G))$ est définie par

$$[\lambda(s)x](t) = x(s^{-1}t), \qquad \forall s, t \in G,\ \forall x \in \ell_2(G).$$

Remarque

Soit $\delta_t : G \to \mathbb{C}$ définie par $\delta_t(s) = \begin{cases} 1, & s = t \\ 0, & s \neq t. \end{cases}$

Alors

$$\lambda(s)\delta_t = \delta_{st}.$$

Représentation régulière à gauche

Soit $\mathcal{B}(\ell_2(G))$ l'espace des opérateurs bornés sur $\ell_2(G)$, c'est-à-dire,

$$\mathcal{B}(\ell_2(G)) = \{f : \ell_2(G) \to \ell_2(G) \mid f \text{ linéaire continue}\}.$$

$$\|f\|_\infty := \|f\|_{\mathcal{B}(\ell_2(G))} = \sup_{\|x\|_{\ell_2}=1} \|f(x)\|_{\ell_2}.$$

La représentation régulière à gauche $\lambda : G \to \mathcal{B}(\ell_2(G))$ est définie par

$$[\lambda(s)x](t) = x(s^{-1}t), \qquad \forall s, t \in G,\ \forall x \in \ell_2(G).$$

Remarque

Soit $\delta_t : G \to \mathbb{C}$ définie par $\delta_t(s) = \begin{cases} 1, & s = t \\ 0, & s \neq t. \end{cases}$

Alors

$$\lambda(s)\delta_t = \delta_{st}.$$

Représentation régulière à gauche

Soit $\mathcal{B}(\ell_2(G))$ l'espace des opérateurs bornés sur $\ell_2(G)$, c'est-à-dire,

$$\mathcal{B}(\ell_2(G)) = \{f : \ell_2(G) \to \ell_2(G) \mid f \text{ linéaire continue}\}.$$

$$\|f\|_\infty := \|f\|_{\mathcal{B}(\ell_2(G))} = \sup_{\|x\|_{\ell_2}=1} \|f(x)\|_{\ell_2}.$$

La représentation régulière à gauche $\lambda : G \to \mathcal{B}(\ell_2(G))$ est définie par

$$[\lambda(s)x](t) = x(s^{-1}t), \qquad \forall s, t \in G,\ \forall x \in \ell_2(G).$$

Remarque

Soit $\delta_t : G \to \mathbb{C}$ définie par $\delta_t(s) = \begin{cases} 1, & s = t \\ 0, & s \neq t. \end{cases}$

Alors

$$\lambda(s)\delta_t = \delta_{st}.$$

Algèbre de von Neumann de groupe $\mathcal{L}(G)$

La représentation régulière peut s'étendre à $\mathbb{C}[G]$ (fonctions à support fini).

$$\lambda\left(\sum_{s\in G} a_s s\right) = \sum_{s\in G} a_s \lambda(s) \in \mathcal{B}(\ell_2(G)).$$

Remarque

Les éléments de $\lambda(\mathbb{C}[G])$ sont des opérateurs de convolution.

$$\left[\lambda\left(\sum_{s\in G} a_s s\right) x\right](t) = \sum_{s\in G} a_s x(s^{-1}t) = a * x(t),$$

où $a = \sum a_s \delta_s$.

Définition

$$\mathcal{L}(G) = \overline{\lambda(\mathbb{C}[G])}^{WOT} \subseteq \mathcal{B}(\ell_2(G))$$

Algèbre de von Neumann de groupe $\mathcal{L}(G)$

La représentation régulière peut s'étendre à $\mathbb{C}[G]$ (fonctions à support fini).

$$\lambda\left(\sum_{s\in G} a_s s\right) = \sum_{s\in G} a_s \lambda(s) \in \mathcal{B}(\ell_2(G)).$$

Remarque

Les éléments de $\lambda\left(\mathbb{C}[G]\right)$ sont des opérateurs de convolution.

$$\left[\lambda\left(\sum_{s\in G} a_s s\right) x\right](t) = \sum_{s\in G} a_s x(s^{-1}t) = a * x(t),$$

où $a = \sum a_s \delta_s$.

Définition

$$\mathcal{L}(G) = \overline{\lambda\left(\mathbb{C}[G]\right)}^{WOT} \subseteq \mathcal{B}(\ell_2(G))$$

Algèbre de von Neumann de groupe $\mathcal{L}(G)$

La représentation régulière peut s'étendre à $\mathbb{C}[G]$ (fonctions à support fini).

$$\lambda\left(\sum_{s\in G} a_s s\right) = \sum_{s\in G} a_s \lambda(s) \in \mathcal{B}(\ell_2(G)).$$

Remarque

Les éléments de $\lambda\left(\mathbb{C}[G]\right)$ sont des opérateurs de convolution.

$$\left[\lambda\left(\sum_{s\in G} a_s s\right) x\right](t) = \sum_{s\in G} a_s x(s^{-1}t) = a * x(t),$$

où $a = \sum a_s \delta_s$.

Définition

$$\mathcal{L}(G) = \overline{\lambda\left(\mathbb{C}[G]\right)}^{WOT} \subseteq \mathcal{B}(\ell_2(G))$$

La trace τ

On définit la trace (ou mesure non commutative) $\tau : \mathcal{L}(G) \to \mathbb{C}$ par

$$\tau(f) = \langle f(\delta_e), \delta_e \rangle,$$

où e est l'élément neutre de G.

Propriétés

- τ est linéaire
- $\forall f \in \mathcal{L}(G),\ \tau(f^*) = \overline{\tau(f)}$
- $\forall f \in \mathcal{L}(G),\ |\tau(f)| \leq \|f\|_\infty$
- $\tau(\lambda(s)) = \begin{cases} 1, & s = e \\ 0, & s \neq e \end{cases}$

La trace τ

On définit la trace (ou mesure non commutative) $\tau : \mathcal{L}(G) \to \mathbb{C}$ par

$$\tau(f) = \langle f(\delta_e), \delta_e \rangle,$$

où e est l'élément neutre de G.

Propriétés

- τ est linéaire
- $\forall f \in \mathcal{L}(G),\ \tau(f^*) = \overline{\tau(f)}$
- $\forall f \in \mathcal{L}(G),\ |\tau(f)| \leq \|f\|_\infty$
- $\tau(\lambda(s)) = \begin{cases} 1, & s = e \\ 0, & s \neq e \end{cases}$

La trace τ

On définit la trace (ou mesure non commutative) $\tau : \mathcal{L}(G) \to \mathbb{C}$ par

$$\tau(f) = \langle f(\delta_e), \delta_e \rangle,$$

où e est l'élément neutre de G.

Propriétés

- τ est linéaire
- $\forall f \in \mathcal{L}(G),\ \tau(f^*) = \overline{\tau(f)}$
- $\forall f \in \mathcal{L}(G),\ |\tau(f)| \leq \|f\|_\infty$
- $\tau(\lambda(s)) = \begin{cases} 1, & s = e \\ 0, & s \neq e \end{cases}$

La trace τ

On définit la trace (ou mesure non commutative) $\tau : \mathcal{L}(G) \to \mathbb{C}$ par

$$\tau(f) = \langle f(\delta_e), \delta_e \rangle,$$

où e est l'élément neutre de G.

Propriétés

- τ est linéaire
- $\forall f \in \mathcal{L}(G),\ \tau(f^*) = \overline{\tau(f)}$
- $\forall f \in \mathcal{L}(G),\ |\tau(f)| \leq \|f\|_\infty$
- $\tau(\lambda(s)) = \begin{cases} 1, & s = e \\ 0, & s \neq e \end{cases}$

La trace τ

On définit la trace (ou mesure non commutative) $\tau : \mathcal{L}(G) \to \mathbb{C}$ par

$$\tau(f) = \langle f(\delta_e), \delta_e \rangle,$$

où e est l'élément neutre de G.

Propriétés

- τ est linéaire
- $\forall f \in \mathcal{L}(G),\ \tau(f^*) = \overline{\tau(f)}$
- $\forall f \in \mathcal{L}(G),\ |\tau(f)| \leq \|f\|_\infty$
- $\tau(\lambda(s)) = \begin{cases} 1, & s = e \\ 0, & s \neq e \end{cases}$

L'espace L_p non commutatif associé à $(\mathcal{L}(G), \tau)$

Soit $1 \leq p < \infty$. Pour tout $f \in \mathcal{L}(G)$ on définit

$$\|f\|_p = \tau\left((f^* f)^{\frac{p}{2}}\right)^{\frac{1}{p}}.$$

Inégalité de Hölder

Soient $1 \leq p, q \leq \infty$ tels que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Pour tous $f, g \in \mathcal{L}(G)$

$$|\tau(fg)| \leq \|f\|_p \|g\|_q.$$

Définition

Pour $1 \leq p < \infty$, l'espace $L_p(\mathcal{L}(G), \tau)$ est le complété de $\mathcal{L}(G)$ pour la norme $\|\cdot\|_p$. On pose $L_\infty(\mathcal{L}(G), \tau) = \mathcal{L}(G)$.

L'espace L_p non commutatif associé à $(\mathcal{L}(G), \tau)$

Soit $1 \leq p < \infty$. Pour tout $f \in \mathcal{L}(G)$ on définit

$$\|f\|_p = \tau\left((f^* f)^{\frac{p}{2}}\right)^{\frac{1}{p}}.$$

Inégalité de Hölder

Soient $1 \leq p, q \leq \infty$ tels que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Pour tous $f, g \in \mathcal{L}(G)$

$$|\tau(fg)| \leq \|f\|_p \|g\|_q.$$

Définition

Pour $1 \leq p < \infty$, l'espace $L_p(\mathcal{L}(G), \tau)$ est le complété de $\mathcal{L}(G)$ pour la norme $\|\cdot\|_p$. On pose $L_\infty(\mathcal{L}(G), \tau) = \mathcal{L}(G)$.

L'espace L_p non commutatif associé à $(\mathcal{L}(G), \tau)$

Soit $1 \leq p < \infty$. Pour tout $f \in \mathcal{L}(G)$ on définit

$$\|f\|_p = \tau\left((f^* f)^{\frac{p}{2}}\right)^{\frac{1}{p}}.$$

Inégalité de Hölder

Soient $1 \leq p, q \leq \infty$ tels que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Pour tous $f, g \in \mathcal{L}(G)$

$$|\tau(fg)| \leq \|f\|_p \|g\|_q.$$

Définition

Pour $1 \leq p < \infty$, l'espace $L_p(\mathcal{L}(G), \tau)$ est le complété de $\mathcal{L}(G)$ pour la norme $\|\cdot\|_p$. On pose $L_\infty(\mathcal{L}(G), \tau) = \mathcal{L}(G)$.

Cas abélien ($G = \mathbb{Z}$)

Pour tout $x \in \ell_2(\mathbb{Z})$,

$$[\lambda(m)x](n) = x(n-m), \quad \forall n, m \in \mathbb{Z}.$$

Rappel

La transformée de Fourier $\mathcal{F} : \ell_2(\mathbb{Z}) \to L_2(\mathbb{R}/\mathbb{Z})$,

$$\mathcal{F}(x)(\theta) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} x(n) e^{2\pi \mathrm{i} n \theta}$$

est une isométrie.

Pour tout $m \in \mathbb{Z}$,

$$\mathcal{F}(\lambda(m)x)(\theta) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} x(n-m) e^{2\pi \mathrm{i} n \theta} = e^{2\pi \mathrm{i} m \theta} \mathcal{F}(x)(\theta).$$

Donc $\lambda(m)$ est un opérateur de multiplication sur $L_2(\mathbb{R}/\mathbb{Z})$.

Cas abélien ($G = \mathbb{Z}$)

Pour tout $x \in \ell_2(\mathbb{Z})$,

$$[\lambda(m)x](n) = x(n-m), \quad \forall n, m \in \mathbb{Z}.$$

Rappel

La transformée de Fourier $\mathcal{F} : \ell_2(\mathbb{Z}) \to L_2(\mathbb{R}/\mathbb{Z})$,

$$\mathcal{F}(x)(\theta) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} x(n) e^{2\pi \mathrm{i} n \theta}$$

est une isométrie.

Pour tout $m \in \mathbb{Z}$,

$$\mathcal{F}(\lambda(m)x)(\theta) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} x(n-m) e^{2\pi \mathrm{i} n \theta} = e^{2\pi \mathrm{i} m \theta} \mathcal{F}(x)(\theta).$$

Donc $\lambda(m)$ est un opérateur de multiplication sur $L_2(\mathbb{R}/\mathbb{Z})$.

Cas abélien ($G = \mathbb{Z}$)

Pour tout $x \in \ell_2(\mathbb{Z})$,

$$[\lambda(m)x](n) = x(n-m), \quad \forall n, m \in \mathbb{Z}.$$

Rappel

La transformée de Fourier $\mathcal{F} : \ell_2(\mathbb{Z}) \to L_2(\mathbb{R}/\mathbb{Z})$,

$$\mathcal{F}(x)(\theta) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} x(n) e^{2\pi \mathrm{i} n \theta}$$

est une isométrie.

Pour tout $m \in \mathbb{Z}$,

$$\mathcal{F}(\lambda(m)x)(\theta) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} x(n-m) e^{2\pi \mathrm{i} n \theta} = e^{2\pi \mathrm{i} m \theta} \mathcal{F}(x)(\theta).$$

Donc $\lambda(m)$ est un opérateur de multiplication sur $L_2(\mathbb{R}/\mathbb{Z})$.

Cas abélien ($G = \mathbb{Z}$)

Pour tout $x \in \ell_2(\mathbb{Z})$,

$$[\lambda(m)x](n) = x(n-m), \quad \forall n, m \in \mathbb{Z}.$$

Rappel

La transformée de Fourier $\mathcal{F} : \ell_2(\mathbb{Z}) \to L_2(\mathbb{R}/\mathbb{Z})$,

$$\mathcal{F}(x)(\theta) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} x(n) e^{2\pi \mathrm{i} n \theta}$$

est une isométrie.

Pour tout $m \in \mathbb{Z}$,

$$\mathcal{F}(\lambda(m)x)(\theta) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} x(n-m) e^{2\pi \mathrm{i} n \theta} = e^{2\pi \mathrm{i} m \theta} \mathcal{F}(x)(\theta).$$

Donc $\lambda(m)$ est un opérateur de multiplication sur $L_2(\mathbb{R}/\mathbb{Z})$.

Cas abélien ($G = \mathbb{Z}$)

On peut montrer que $\mathcal{L}(\mathbb{Z}) = L_\infty(\mathbb{R}/\mathbb{Z})$ en identifiant

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}} a_n \lambda(n) \quad \longleftrightarrow \quad \sum_{n\in\mathbb{Z}} a_n e^{2\pi i n\theta}.$$

De plus,

$$\tau\left(\sum_{n\in\mathbb{Z}} a_n \lambda(n)\right) = a_0 = \int_0^1 \left(\sum_{n\in\mathbb{Z}} a_n e^{2\pi i n\theta}\right) d\theta.$$

Par conséquent, pour tout $1 \leq p \leq \infty$,

$$L_p(\mathcal{L}(\mathbb{Z}), \tau) = L_p(\mathbb{R}/\mathbb{Z}).$$

Remarque

En général, pour G abélien discret,

$$L_p(\mathcal{L}(G), \tau) = L_p(\hat{G}).$$

Cas abélien ($G = \mathbb{Z}$)

On peut montrer que $\mathcal{L}(\mathbb{Z}) = L_\infty(\mathbb{R}/\mathbb{Z})$ en identifiant

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}} a_n \lambda(n) \quad \longleftrightarrow \quad \sum_{n\in\mathbb{Z}} a_n e^{2\pi i n\theta}.$$

De plus,

$$\tau\left(\sum_{n\in\mathbb{Z}} a_n \lambda(n)\right) = a_0 = \int_0^1 \left(\sum_{n\in\mathbb{Z}} a_n e^{2\pi i n\theta}\right) d\theta.$$

Par conséquent, pour tout $1 \leq p \leq \infty$,

$$L_p(\mathcal{L}(\mathbb{Z}), \tau) = L_p(\mathbb{R}/\mathbb{Z}).$$

Remarque

En général, pour G abélien discret,

$$L_p(\mathcal{L}(G), \tau) = L_p(\hat{G}).$$

Cas abélien ($G = \mathbb{Z}$)

On peut montrer que $\mathcal{L}(\mathbb{Z}) = L_\infty(\mathbb{R}/\mathbb{Z})$ en identifiant

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}} a_n \lambda(n) \quad \longleftrightarrow \quad \sum_{n\in\mathbb{Z}} a_n e^{2\pi i n\theta}.$$

De plus,

$$\tau\left(\sum_{n\in\mathbb{Z}} a_n \lambda(n)\right) = a_0 = \int_0^1 \left(\sum_{n\in\mathbb{Z}} a_n e^{2\pi i n\theta}\right) d\theta.$$

Par conséquent, pour tout $1 \leq p \leq \infty$,

$$L_p(\mathcal{L}(\mathbb{Z}), \tau) = L_p(\mathbb{R}/\mathbb{Z}).$$

Remarque

En général, pour G abélien discret,

$$L_p(\mathcal{L}(G), \tau) = L_p(\hat{G}).$$

Cas abélien ($G = \mathbb{Z}$)

On peut montrer que $\mathcal{L}(\mathbb{Z}) = L_\infty(\mathbb{R}/\mathbb{Z})$ en identifiant

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}} a_n \lambda(n) \quad \longleftrightarrow \quad \sum_{n\in\mathbb{Z}} a_n e^{2\pi i n\theta}.$$

De plus,

$$\tau\left(\sum_{n\in\mathbb{Z}} a_n \lambda(n)\right) = a_0 = \int_0^1 \left(\sum_{n\in\mathbb{Z}} a_n e^{2\pi i n\theta}\right) d\theta.$$

Par conséquent, pour tout $1 \leq p \leq \infty$,

$$L_p(\mathcal{L}(\mathbb{Z}), \tau) = L_p(\mathbb{R}/\mathbb{Z}).$$

Remarque

En général, pour G abélien discret,

$$L_p(\mathcal{L}(G), \tau) = L_p(\hat{G}).$$

Transformée de Hilbert

La transformée de Hilbert $H : L_2(\mathbb{R}/\mathbb{Z}) \to L_2(\mathbb{R}/\mathbb{Z})$ est donnée par

$$f = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \hat{f}(n)e^{2\pi i n\theta} \quad \longmapsto \quad \sum_{n>0} \hat{f}(n)e^{2\pi i n\theta}.$$

Théorème (M. Riesz, 1928)

La transformée de Hilbert définit un opérateur borné $H : L_p(\mathbb{R}/\mathbb{Z}) \to L_p(\mathbb{R}/\mathbb{Z})$ pour tout $1 < p < \infty$.

Remarque

$$\hat{f}(n) = \int_0^1 f(\theta)e^{-2\pi i n\theta}\, d\theta = \tau(f\lambda(-n))$$

Ainsi, dans le cas général on peut définir les coefficients de Fourier de $f \in \mathcal{L}(G)$:

$$\hat{f}(s) = \tau(f\lambda(s^{-1})),\ \forall s \in G.$$

Transformée de Hilbert

La transformée de Hilbert $H : L_2(\mathbb{R}/\mathbb{Z}) \to L_2(\mathbb{R}/\mathbb{Z})$ est donnée par

$$f = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \hat{f}(n)e^{2\pi i n\theta} \quad \longmapsto \quad \sum_{n>0} \hat{f}(n)e^{2\pi i n\theta}.$$

Théorème (M. Riesz, 1928)

La transformée de Hilbert définit un opérateur borné $H : L_p(\mathbb{R}/\mathbb{Z}) \to L_p(\mathbb{R}/\mathbb{Z})$ pour tout $1 < p < \infty$.

Remarque

$$\hat{f}(n) = \int_0^1 f(\theta)e^{-2\pi i n\theta}\, d\theta = \tau(f\lambda(-n))$$

Ainsi, dans le cas général on peut définir les coefficients de Fourier de $f \in \mathcal{L}(G)$:

$$\hat{f}(s) = \tau(f\lambda(s^{-1})),\ \forall s \in G.$$

Transformée de Hilbert

La transformée de Hilbert $H : L_2(\mathbb{R}/\mathbb{Z}) \to L_2(\mathbb{R}/\mathbb{Z})$ est donnée par

$$f = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \hat{f}(n)e^{2\pi i n\theta} \quad \longmapsto \quad \sum_{n>0} \hat{f}(n)e^{2\pi i n\theta}.$$

Théorème (M. Riesz, 1928)

La transformée de Hilbert définit un opérateur borné $H : L_p(\mathbb{R}/\mathbb{Z}) \to L_p(\mathbb{R}/\mathbb{Z})$ pour tout $1 < p < \infty$.

Remarque

$$\hat{f}(n) = \int_0^1 f(\theta)e^{-2\pi i n\theta}\, d\theta = \tau(f\lambda(-n))$$

Ainsi, dans le cas général on peut définir les coefficients de Fourier de $f \in \mathcal{L}(G)$:

$$\hat{f}(s) = \tau(f\lambda(s^{-1})),\ \forall s \in G.$$

Transformée de Hilbert

La transformée de Hilbert $H : L_2(\mathbb{R}/\mathbb{Z}) \to L_2(\mathbb{R}/\mathbb{Z})$ est donnée par

$$f = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \hat{f}(n)e^{2\pi i n\theta} \quad \longmapsto \quad \sum_{n>0} \hat{f}(n)e^{2\pi i n\theta}.$$

Théorème (M. Riesz, 1928)

La transformée de Hilbert définit un opérateur borné $H : L_p(\mathbb{R}/\mathbb{Z}) \to L_p(\mathbb{R}/\mathbb{Z})$ pour tout $1 < p < \infty$.

Remarque

$$\hat{f}(n) = \int_0^1 f(\theta)e^{-2\pi i n\theta}\, d\theta = \tau(f\lambda(-n))$$

Ainsi, dans le cas général on peut définir les coefficients de Fourier de $f \in \mathcal{L}(G)$:

$$\hat{f}(s) = \tau(f\lambda(s^{-1})),\ \forall s \in G.$$

Transformée de Hilbert

Pour tout $f \in \lambda(\mathbb{C}[G]) \subseteq \mathcal{L}(G)$,

$$f = \sum_{s \in G} \hat{f}(s)\lambda(s) = \sum_{s \in G} \tau(f\lambda(s^{-1}))\lambda(s).$$

Soit maintenant $G = \mathbb{F}_2 = \mathbb{F}(\{a, b\})$ le groupe libre à deux générateurs. On peut définir la transformée de Hilbert sur $\mathbb{F}_2$ par

$$\sum_{s \in \mathbb{F}_2} \hat{f}(s)\lambda(s) \quad \longmapsto \quad \sum_{s \in W(a)} \hat{f}(s)\lambda(s),$$

où $W(a)$ désigne l'ensemble des mots réduits qui commencent par a.

Théorème (Mei, Ricard, 2016)

Sur le groupe libre $\mathbb{F}_2$, la transformée de Hilbert définit un opérateur borné $H : L_p(\mathcal{L}(\mathbb{F}_2)) \to L_p(\mathcal{L}(\mathbb{F}_2))$ pour tout $1 < p < \infty$.

Transformée de Hilbert

Pour tout $f \in \lambda(\mathbb{C}[G]) \subseteq \mathcal{L}(G)$,

$$f = \sum_{s \in G} \hat{f}(s)\lambda(s) = \sum_{s \in G} \tau(f\lambda(s^{-1}))\lambda(s).$$

Soit maintenant $G = \mathbb{F}_2 = \mathbb{F}(\{a, b\})$ le groupe libre à deux générateurs. On peut définir la transformée de Hilbert sur $\mathbb{F}_2$ par

$$\sum_{s \in \mathbb{F}_2} \hat{f}(s)\lambda(s) \quad \longmapsto \quad \sum_{s \in W(a)} \hat{f}(s)\lambda(s),$$

où $W(a)$ désigne l'ensemble des mots réduits qui commencent par a.

Théorème (Mei, Ricard, 2016)

Sur le groupe libre $\mathbb{F}_2$, la transformée de Hilbert définit un opérateur borné $H : L_p(\mathcal{L}(\mathbb{F}_2)) \to L_p(\mathcal{L}(\mathbb{F}_2))$ pour tout $1 < p < \infty$.

Transformée de Hilbert

Pour tout $f \in \lambda(\mathbb{C}[G]) \subseteq \mathcal{L}(G)$,

$$f = \sum_{s \in G} \hat{f}(s)\lambda(s) = \sum_{s \in G} \tau(f\lambda(s^{-1}))\lambda(s).$$

Soit maintenant $G = \mathbb{F}_2 = \mathbb{F}(\{a, b\})$ le groupe libre à deux générateurs. On peut définir la transformée de Hilbert sur $\mathbb{F}_2$ par

$$\sum_{s \in \mathbb{F}_2} \hat{f}(s)\lambda(s) \quad \longmapsto \quad \sum_{s \in W(a)} \hat{f}(s)\lambda(s),$$

où $W(a)$ désigne l'ensemble des mots réduits qui commencent par a.

Théorème (Mei, Ricard, 2016)

Sur le groupe libre $\mathbb{F}_2$, la transformée de Hilbert définit un opérateur borné $H : L_p(\mathcal{L}(\mathbb{F}_2)) \to L_p(\mathcal{L}(\mathbb{F}_2))$ pour tout $1 < p < \infty$.

Merci pour votre attention.