Graphes de grand nombre chromatique

Stéphan Thomassé

ENS-Lyon. LIP

Inter'Action - 23 Mai 2016

Nombre chromatique

Coloration (définition historique)

Soit G un graphe d'ensemble de sommets V et d'arêtes E.

Coloration (définition historique)

Soit G un graphe d'ensemble de sommets V et d'arêtes E.
Une application c de V dans un ensemble de *couleurs* C telle que $c(x) \neq c(y)$ pour toute arête xy est une *coloration* de G.

Coloration (définition historique)

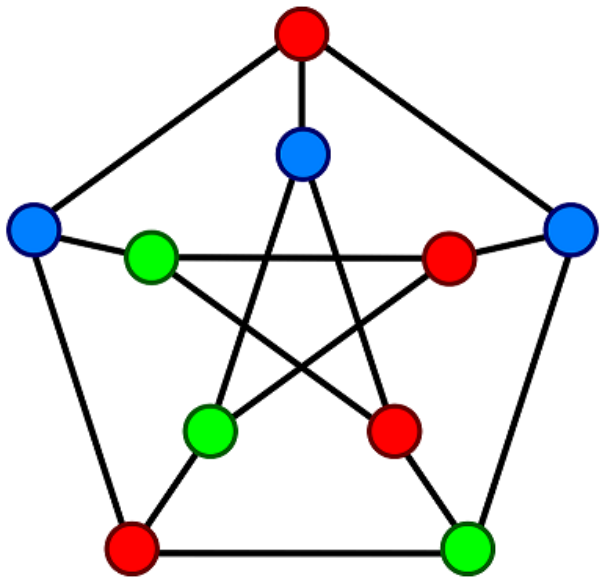
Soit G un graphe d'ensemble de sommets V et d'arêtes E.
Une application c de V dans un ensemble de *couleurs* C telle que $c(x) \neq c(y)$ pour toute arête xy est une *coloration* de G.
Si C a taille k, on dit que G est *k-colorable*.

Coloration (définition historique)

Soit G un graphe d'ensemble de sommets V et d'arêtes E.
Une application c de V dans un ensemble de *couleurs* C telle que $c(x) \neq c(y)$ pour toute arête xy est une *coloration* de G.
Si C a taille k, on dit que G est *k-colorable*.
Le plus petit k tel que G est k-colorable est le *nombre chromatique* de G, noté $\chi(G)$.

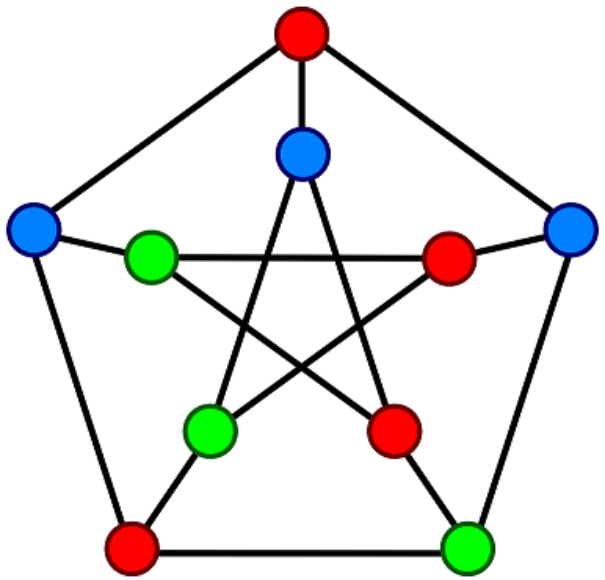
Coloration (définition historique)

Soit G un graphe d'ensemble de sommets V et d'arêtes E.
Une application c de V dans un ensemble de *couleurs* C telle que $c(x) \neq c(y)$ pour toute arête xy est une *coloration* de G.
Si C a taille k, on dit que G est *k-colorable*.
Le plus petit k tel que G est k-colorable est le *nombre chromatique* de G, noté $\chi(G)$.



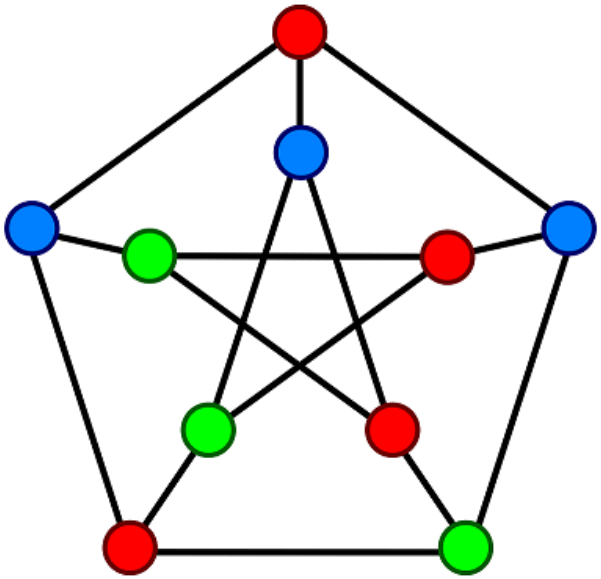
Coloration (définition historique)

Soit G un graphe d'ensemble de sommets V et d'arêtes E.
Une application c de V dans un ensemble de *couleurs* C telle que $c(x) \neq c(y)$ pour toute arête xy est une *coloration* de G.
Si C a taille k, on dit que G est *k-colorable*.
Le plus petit k tel que G est k-colorable est le *nombre chromatique* de G, noté $\chi(G)$.

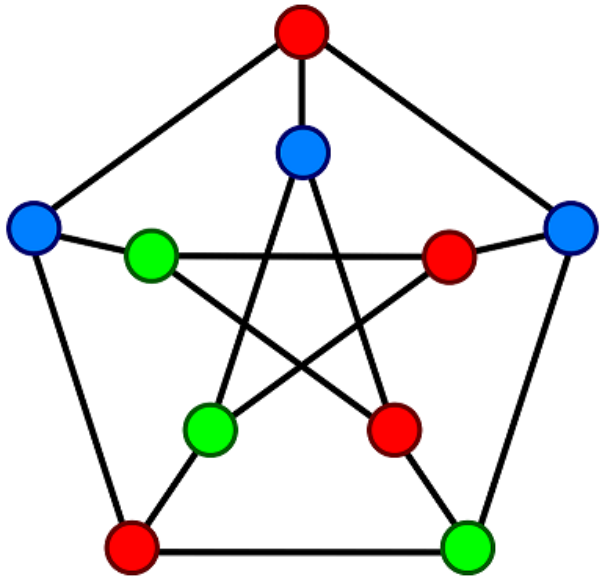


Le graphe de Petersen est 3-chromatique

Coloration (couverture en stable)

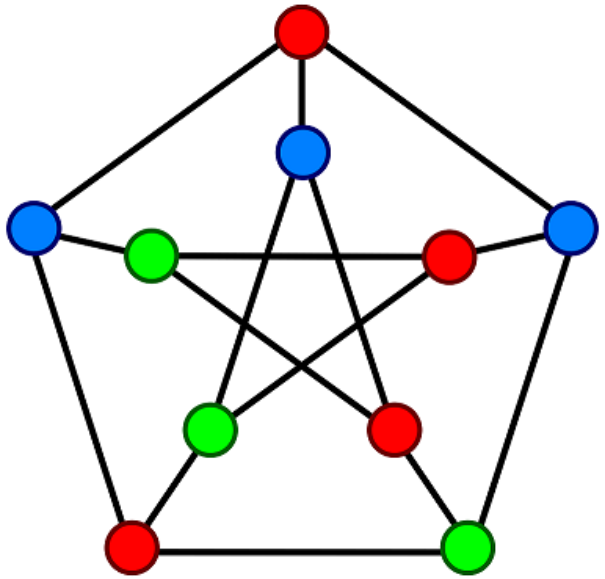


Coloration (couverture en stable)



Chaque classe de couleur est un *stable* du graphe, i.e. un ensemble de sommets deux à deux non reliés.

Coloration (couverture en stable)



Chaque classe de couleur est un *stable* du graphe, i.e. un ensemble de sommets deux à deux non reliés.

$\chi(G)$ est le plus petit nombre de stables qui couvrent G.

Coloration (morphisme vers un complet)

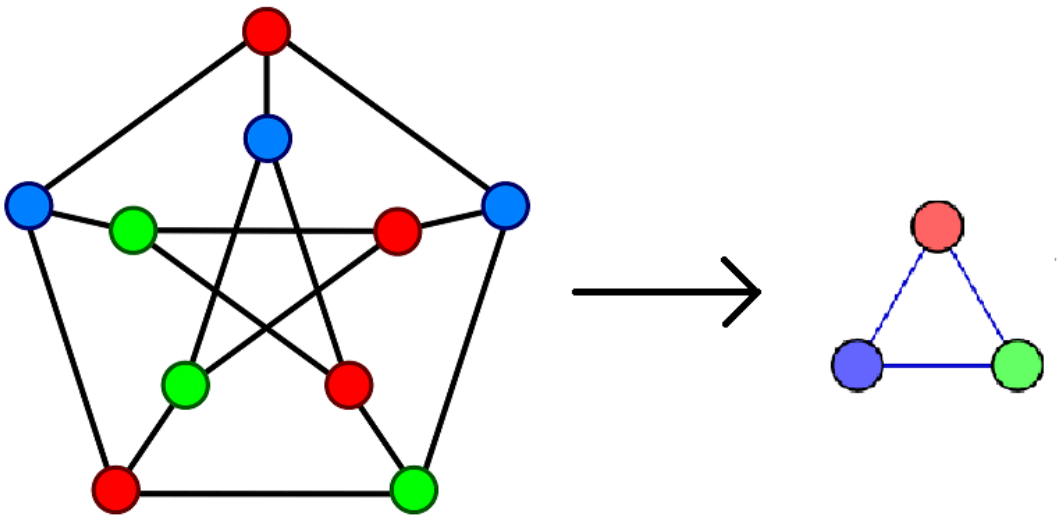
Un *homomorphisme* de $G = (V, E)$ dans $H = (V', E')$ est une application de V dans V' telle que :

$$xy \in E \Rightarrow f(x)f(y) \in E'$$

Coloration (morphisme vers un complet)

Un *homomorphisme* de $G = (V, E)$ dans $H = (V', E')$ est une application de V dans V' telle que :

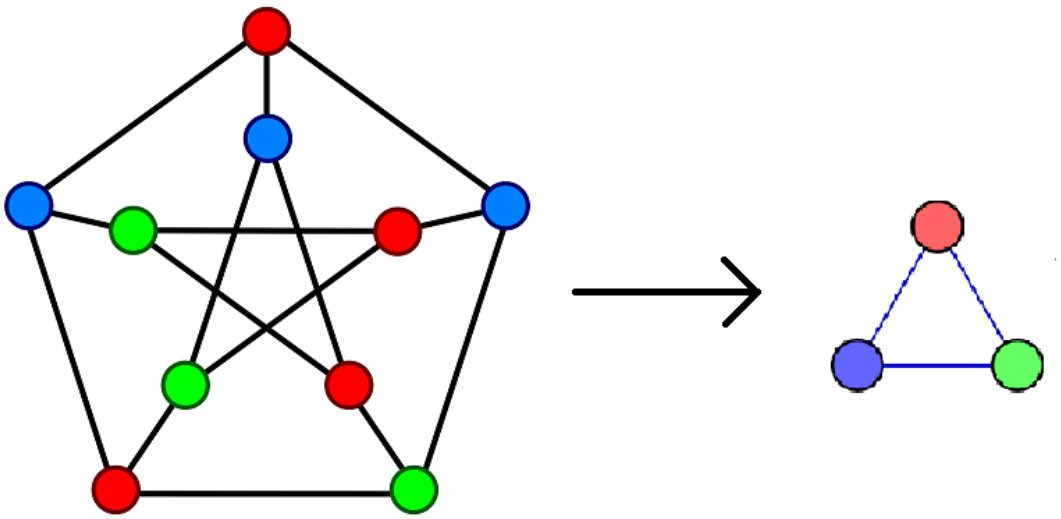
$$xy \in E \Rightarrow f(x)f(y) \in E'$$



Coloration (morphisme vers un complet)

Un *homomorphisme* de $G = (V, E)$ dans $H = (V', E')$ est une application de V dans V' telle que :

$$xy \in E \Rightarrow f(x)f(y) \in E'$$

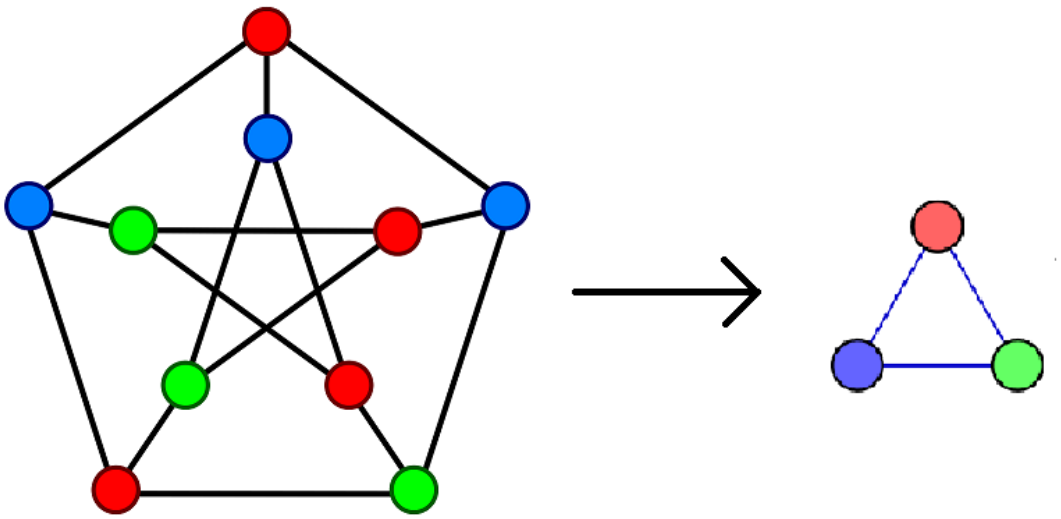


On a Petersen $\rightarrow K_3$, le graphe complet à 3 sommets.

Coloration (morphisme vers un complet)

Un *homomorphisme* de $G = (V, E)$ dans $H = (V', E')$ est une application de V dans V' telle que :

$$xy \in E \Rightarrow f(x)f(y) \in E'$$



On a Petersen $\to K_3$, le graphe complet à 3 sommets.

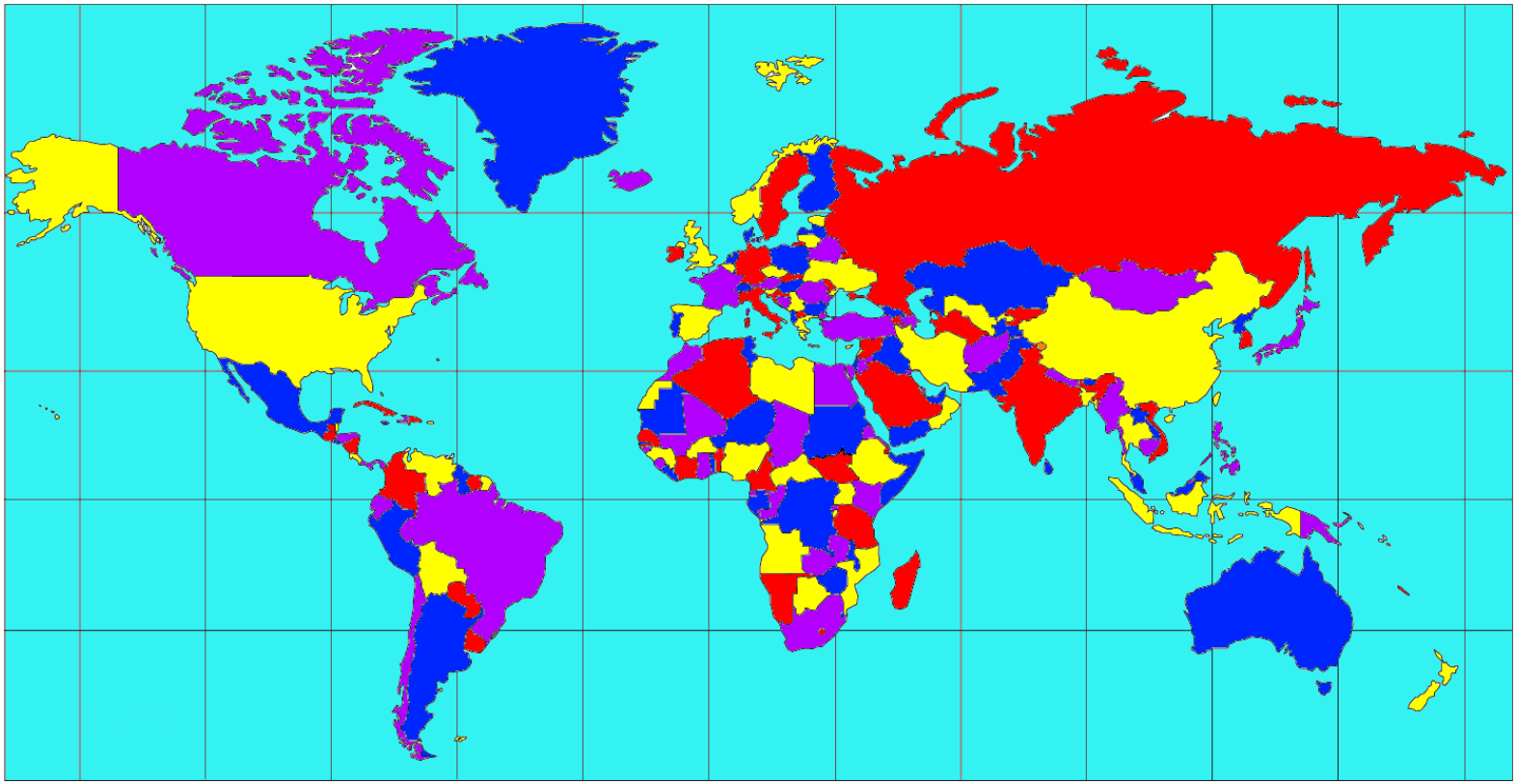
$\chi(G)$ est le plus petit ℓ tel que $G \to K_\ell$

La coloration à la fin du 19ème siècle

Combien de couleurs sont nécessaires pour colorer une carte ?

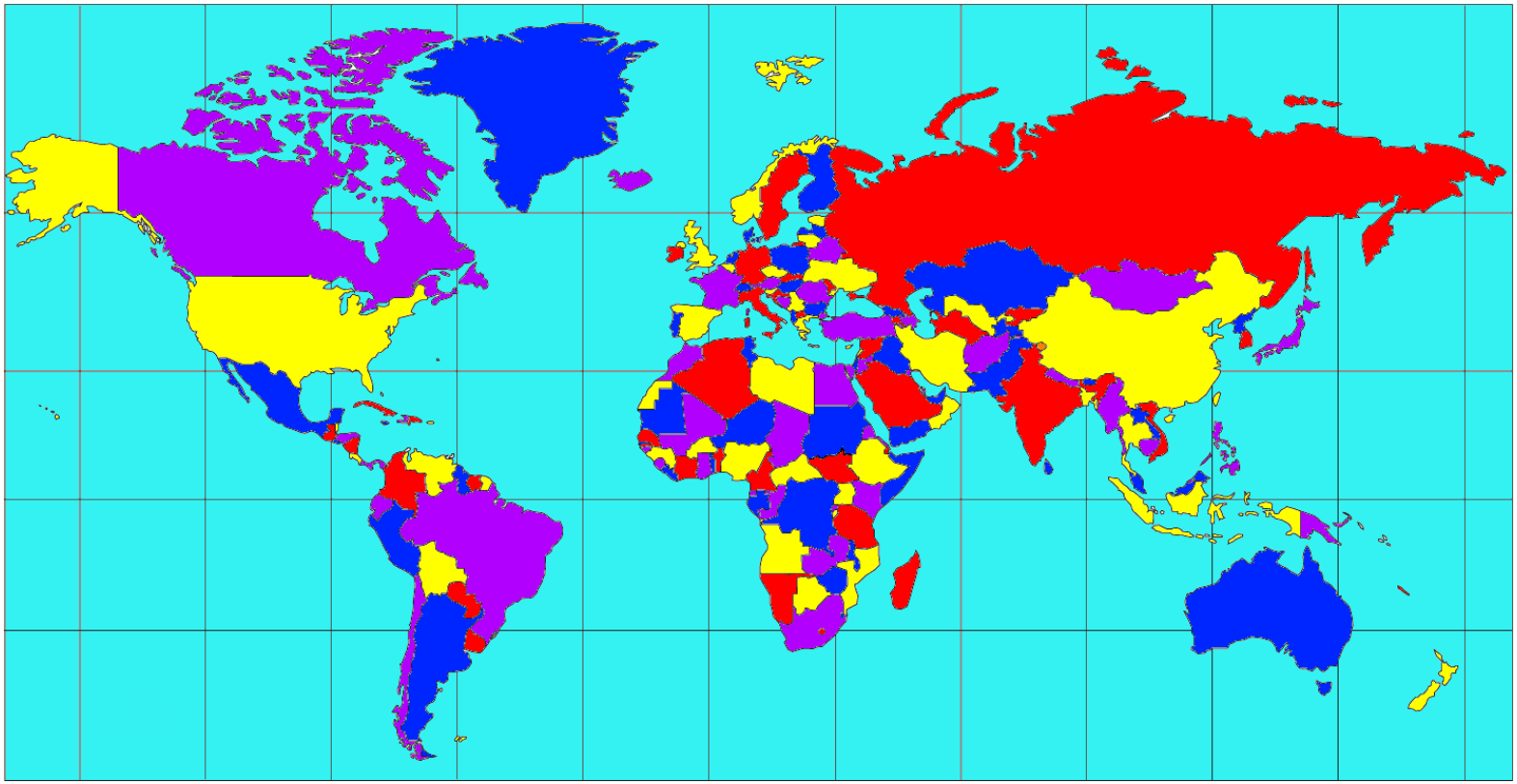
La coloration à la fin du 19ème siècle

Combien de couleurs sont nécessaires pour colorer une carte ?



La coloration à la fin du 19ème siècle

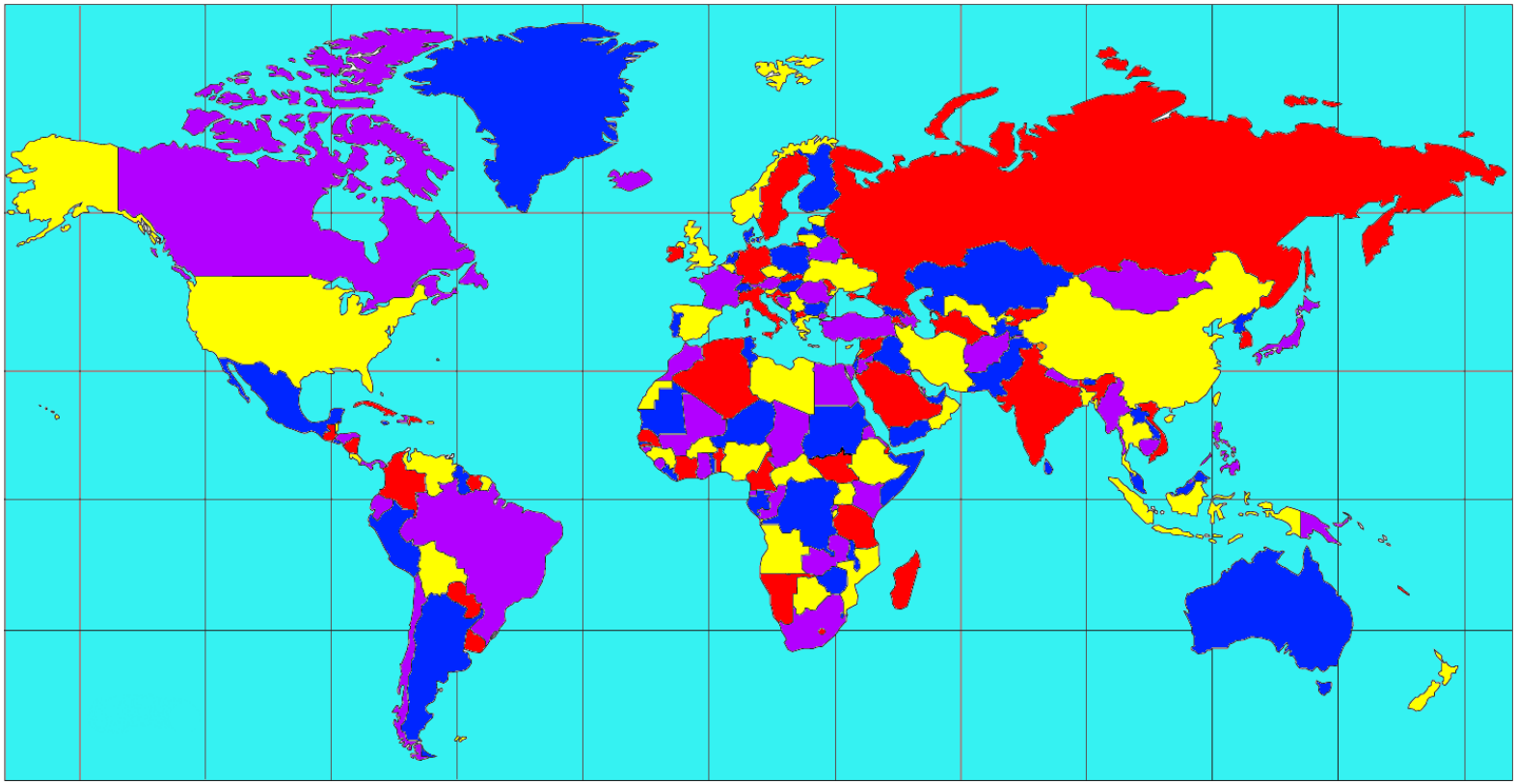
Combien de couleurs sont nécessaires pour colorer une carte ?



Graphe de conflit : sommets = pays et arêtes = frontières communes

La coloration à la fin du 19ème siècle

Combien de couleurs sont nécessaires pour colorer une carte ?



Graphe de conflit : sommets = pays et arêtes = frontières communes

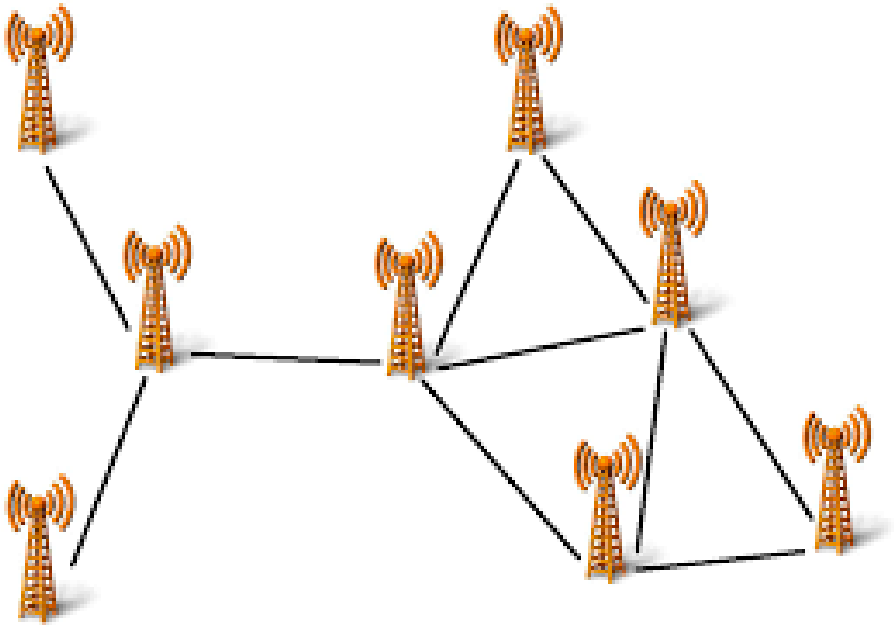
Théorème (Appel et Haken 1976) Tout graphe planaire est 4-colorable

La coloration à la fin du 20eme siècle

Comment attribuer une fréquence à chaque antenne en évitant les interférences ?

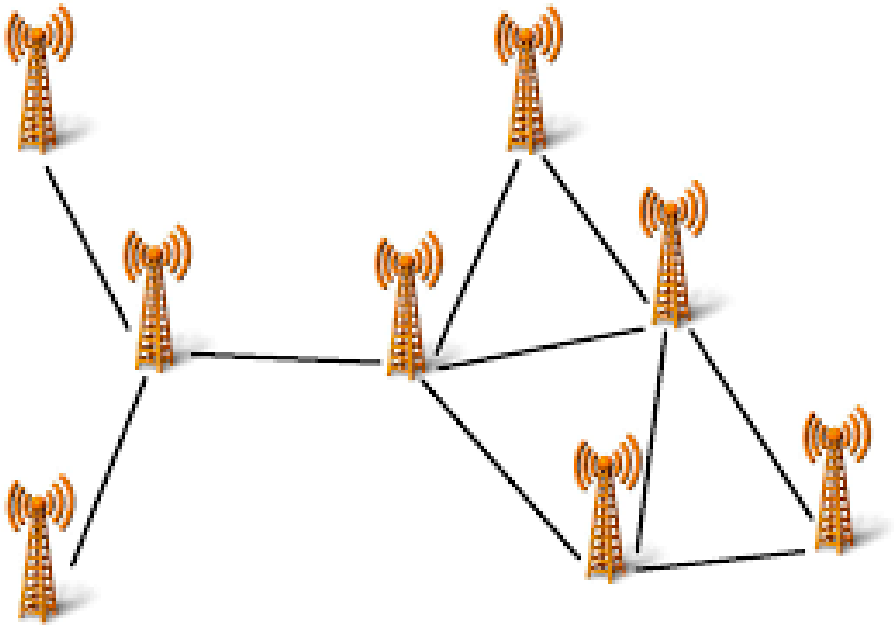
La coloration à la fin du 20eme siècle

Comment attribuer une fréquence à chaque antenne en évitant les interférences ?



La coloration à la fin du 20eme siècle

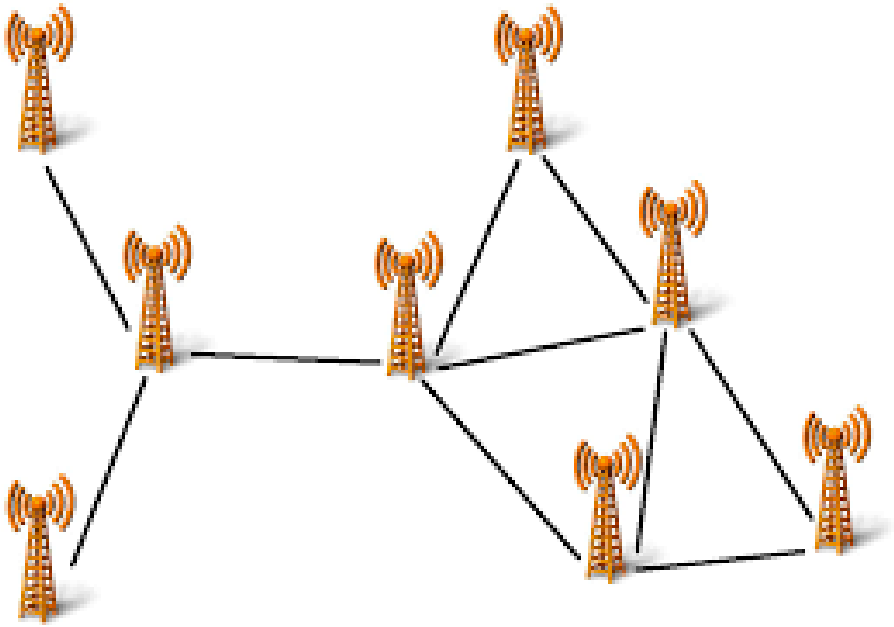
Comment attribuer une fréquence à chaque antenne en évitant les interférences ?



Graphe de conflit : intersection de disques (classe plus grande que les graphes planaires)

La coloration à la fin du 20eme siècle

Comment attribuer une fréquence à chaque antenne en évitant les interférences ?



Graphe de conflit : intersection de disques (classe plus grande que les graphes planaires)

Question : Comment colorer efficacement ?

Après 150 ans d'efforts...

Décider si un graphe est 2-colorable (biparti) est polynomial.

Après 150 ans d'efforts...

Décider si un graphe est 2-colorable (biparti) est polynomial.
Décider si un graphe est 3-colorable est NP-complet.

Après 150 ans d'efforts...

Décider si un graphe est 2-colorable (biparti) est polynomial.
Décider si un graphe est 3-colorable est NP-complet.
Peut-on efficacement colorer un graphe 3 colorable G ayant n sommets donné en entrée, quitte à utiliser plus de couleurs ?

Après 150 ans d'efforts...

Décider si un graphe est 2-colorable (biparti) est polynomial.
Décider si un graphe est 3-colorable est NP-complet.
Peut-on efficacement colorer un graphe 3 colorable G ayant n sommets donné en entrée, quitte à utiliser plus de couleurs ?
Colorer G en 4 couleurs est NP-complet.

Après 150 ans d'efforts...

Décider si un graphe est 2-colorable (biparti) est polynomial.
Décider si un graphe est 3-colorable est NP-complet.
Peut-on efficacement colorer un graphe 3 colorable G ayant n sommets donné en entrée, quitte à utiliser plus de couleurs ?
Colorer G en 4 couleurs est NP-complet.

Kawarabayashi et Thorup (2014) On peut $n^{0.1999}$-colorer G en temps polynomial.

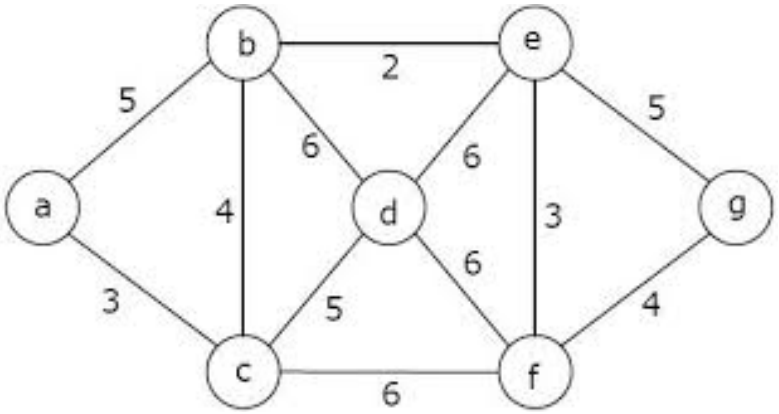
Bornes inférieures

Le Graal : P vs NP

On se donne en entrée un graphe $G = (V, E)$ dont les arêtes sont pondérées. Les sommets sont des villes et les arêtes des routes de longueurs variables

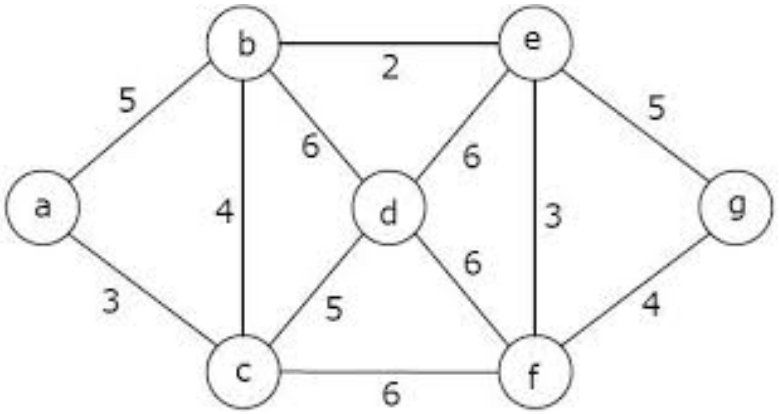
Le Graal : P vs NP

On se donne en entrée un graphe $G = (V, E)$ dont les arêtes sont pondérées. Les sommets sont des villes et les arêtes des routes de longueurs variables



Le Graal : P vs NP

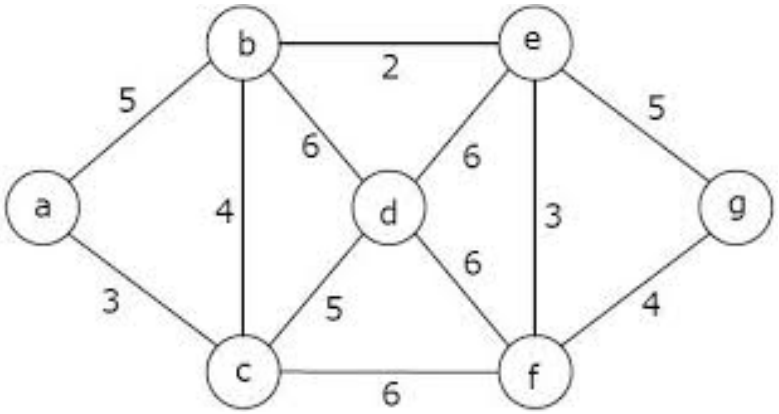
On se donne en entrée un graphe $G = (V, E)$ dont les arêtes sont pondérées. Les sommets sont des villes et les arêtes des routes de longueurs variables



Le problème du chasse-neige est polynomial : il suffit de trouver un arbre couvrant de poids minimal (algorithme de Kruskal).

Le Graal : P vs NP

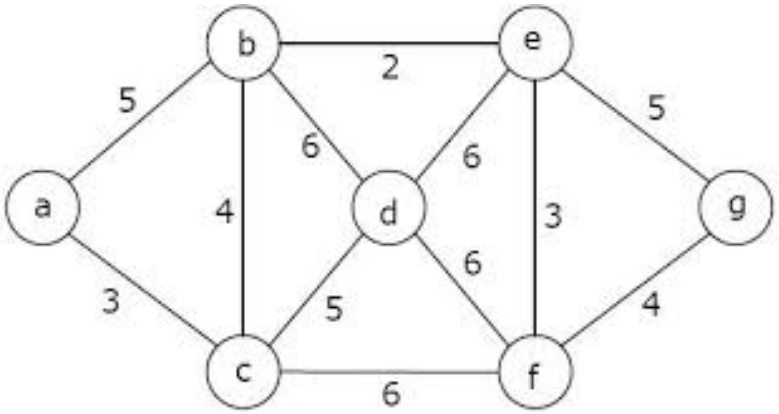
On se donne en entrée un graphe $G = (V, E)$ dont les arêtes sont pondérées. Les sommets sont des villes et les arêtes des routes de longueurs variables



Le problème du chasse-neige est polynomial : il suffit de trouver un arbre couvrant de poids minimal (algorithme de Kruskal).
Le problème du voyageur de commerce est NP-dur : on ne sait pas trouver efficacement un cycle de poids minimum passant par tous les sommets.

Le Graal : P vs NP

On se donne en entrée un graphe $G = (V, E)$ dont les arêtes sont pondérées. Les sommets sont des villes et les arêtes des routes de longueurs variables



Le problème du chasse-neige est polynomial : il suffit de trouver un arbre couvrant de poids minimal (algorithme de Kruskal).
Le problème du voyageur de commerce est NP-dur : on ne sait pas trouver efficacement un cycle de poids minimum passant par tous les sommets.

Pourquoi un problème est-il plus dur que l'autre ?

Relier complexité algorithmique à complexité structurelle

Un arbre couvrant de $G = (V, E)$ est un élément de $\{0, 1\}^E$.

Relier complexité algorithmique à complexité structurelle

Un arbre couvrant de $G = (V, E)$ est un élément de $\{0, 1\}^E$.
L'enveloppe convexe de tous ces arbres est le *polytope des arbres couvrants* SPAN-TREE.

Relier complexité algorithmique à complexité structurelle

Un arbre couvrant de $G = (V, E)$ est un élément de $\{0, 1\}^E$.
L'enveloppe convexe de tous ces arbres est le *polytope des arbres couvrants* SPAN-TREE.
Optimiser une fonction linéaire sur SPAN-TREE est exactement calculer un arbre couvrant de poids minimum.

Relier complexité algorithmique à complexité structurelle

Un arbre couvrant de $G = (V, E)$ est un élément de $\{0, 1\}^E$.
L'enveloppe convexe de tous ces arbres est le *polytope des arbres couvrants* SPAN-TREE.
Optimiser une fonction linéaire sur SPAN-TREE est exactement calculer un arbre couvrant de poids minimum.
On définit de même TSP le polytope du voyageur de commerce.

Relier complexité algorithmique à complexité structurelle

Un arbre couvrant de $G = (V, E)$ est un élément de $\{0, 1\}^E$.
L'enveloppe convexe de tous ces arbres est le *polytope des arbres couvrants* SPAN-TREE.
Optimiser une fonction linéaire sur SPAN-TREE est exactement calculer un arbre couvrant de poids minimum.
On définit de même TSP le polytope du voyageur de commerce.

Pourquoi SPAN-TREE est-il plus simple que TSP ?

Formulations étendues.

A la fois SPAN-TREE et TSP ont un nombre exponentiel de sommets et de facettes.

Formulations étendues.

A la fois SPAN-TREE et TSP ont un nombre exponentiel de sommets et de facettes.
Théorème (Edmonds, Martin) SPAN-TREE est la projection d'un polytope EXT ayant un nombre polynomial de facettes (*formulation étendue polynomiale*).

Formulations étendues.

A la fois SPAN-TREE et TSP ont un nombre exponentiel de sommets et de facettes.
Théorème (Edmonds, Martin) SPAN-TREE est la projection d'un polytope EXT ayant un nombre polynomial de facettes (*formulation étendue polynomiale*).
Il suffit d'optimiser sur EXT, puis de projeter.

Formulations étendues.

A la fois SPAN-TREE et TSP ont un nombre exponentiel de sommets et de facettes.
Théorème (Edmonds, Martin) SPAN-TREE est la projection d'un polytope EXT ayant un nombre polynomial de facettes (*formulation étendue polynomiale*).
Il suffit d'optimiser sur EXT, puis de projeter.
Fiorini et al. (2012) TSP n'admet pas de formulation étendue polynomiale

Formulations étendues.

A la fois SPAN-TREE et TSP ont un nombre exponentiel de sommets et de facettes.
Théorème (Edmonds, Martin) SPAN-TREE est la projection d'un polytope EXT ayant un nombre polynomial de facettes (*formulation étendue polynomiale*).
Il suffit d'optimiser sur EXT, puis de projeter.
Fiorini et al. (2012) TSP n'admet pas de formulation étendue polynomiale
Kaibel et Walter (2014) Argument élémentaire avec borne inférieure en $1,5^n$.

Formulations étendues.

A la fois SPAN-TREE et TSP ont un nombre exponentiel de sommets et de facettes.
Théorème (Edmonds, Martin) SPAN-TREE est la projection d'un polytope EXT ayant un nombre polynomial de facettes (*formulation étendue polynomiale*).
Il suffit d'optimiser sur EXT, puis de projeter.
Fiorini et al. (2012) TSP n'admet pas de formulation étendue polynomiale
Kaibel et Walter (2014) Argument élémentaire avec borne inférieure en $1,5^n$.

La complexité de TSP résulte du nombre chromatique au moins $1,5^n$ du graphe d'écart associé au polytope.

Bornes inférieures.

Comment certifier que $\chi(G)$ est grand ?

Bornes inférieures.

Comment certifier que $\chi(G)$ est grand ?
Facile de certifier que $\chi(G) \geq 3$: cycle impair

Bornes inférieures.

Comment certifier que $\chi(G)$ est grand ?
Facile de certifier que $\chi(G) \geq 3$: cycle impair
Si G contient un graphe complet K_c, on a $\chi(G) \geq c$.

Bornes inférieures.

Comment certifier que $\chi(G)$ est grand ?
Facile de certifier que $\chi(G) \geq 3$: cycle impair
Si G contient un graphe complet K_c, on a $\chi(G) \geq c$.
Et si G ne contient pas même un triangle ?

Bornes inférieures.

Comment certifier que $\chi(G)$ est grand ?
Facile de certifier que $\chi(G) \geq 3$: cycle impair
Si G contient un graphe complet K_c, on a $\chi(G) \geq c$.
Et si G ne contient pas même un triangle ?

Comment construire des graphes sans triangle de grand nombre chromatique ?

Constructions

Mycielski

A tout graphe G sur l'ensemble de sommets $V = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$, on associe le graphe $M(G)$ suivant :

Mycielski

A tout graphe G sur l'ensemble de sommets $V = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$, on associe le graphe $M(G)$ suivant :

- On clone chaque sommet v_i en u_i, sans relier les u_i entre eux.

Mycielski

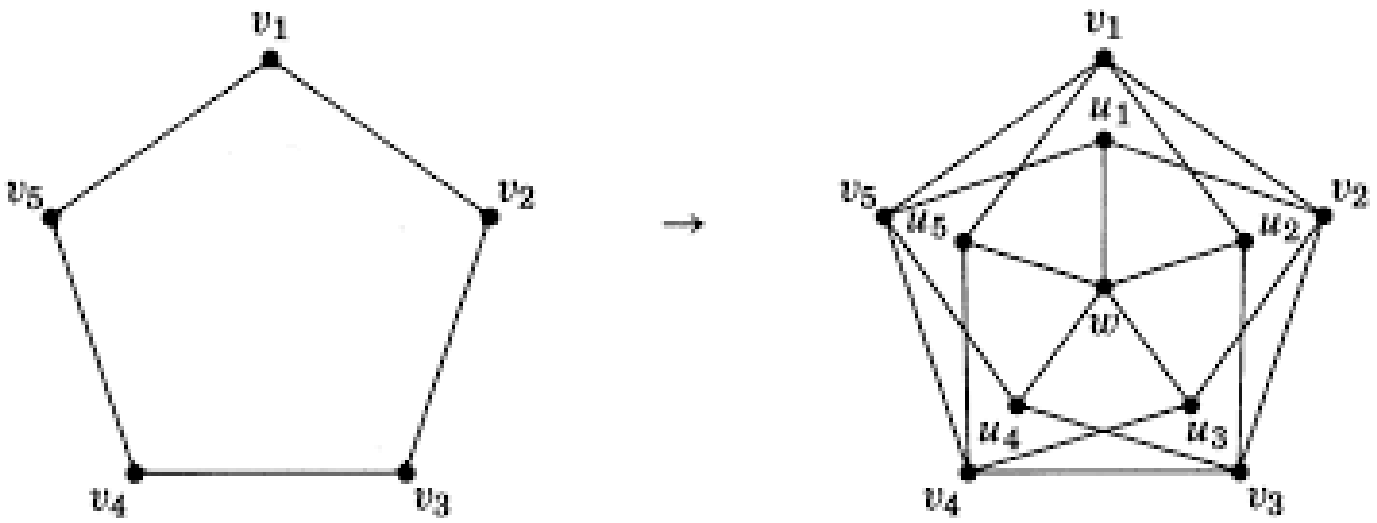
A tout graphe G sur l'ensemble de sommets $V = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$, on associe le graphe $M(G)$ suivant :

- On clone chaque sommet v_i en u_i, sans relier les u_i entre eux.
- On ajoute un sommet w relié à tous les u_i.

Mycielski

A tout graphe G sur l'ensemble de sommets $V = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$, on associe le graphe $M(G)$ suivant :

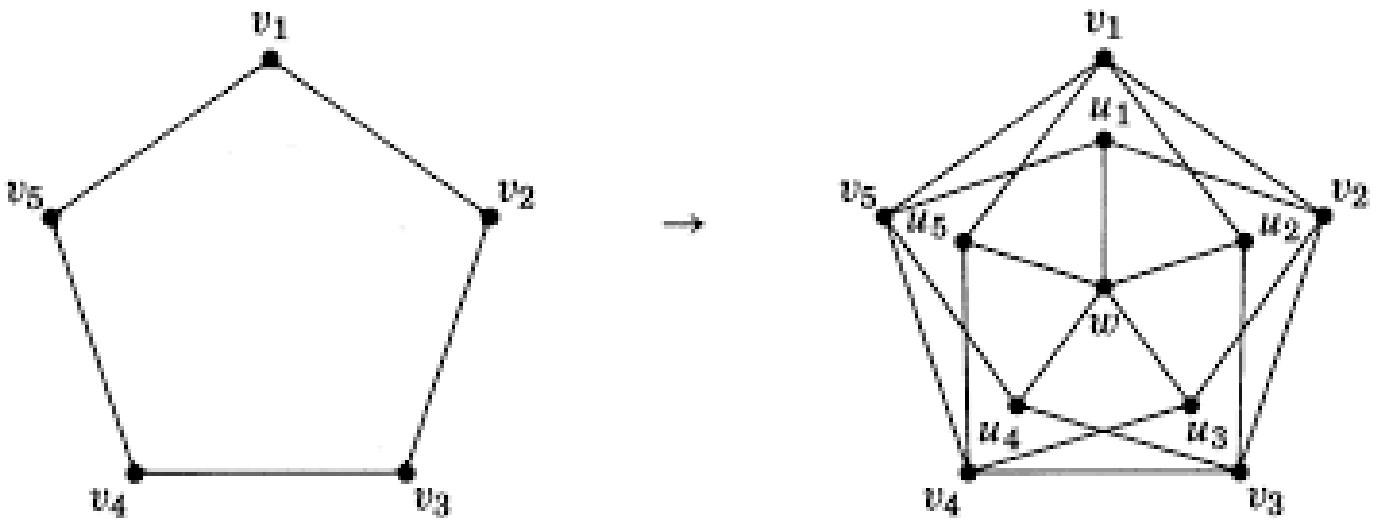
- On clone chaque sommet v_i en u_i, sans relier les u_i entre eux.
- On ajoute un sommet w relié à tous les u_i.



Mycielski

A tout graphe G sur l'ensemble de sommets $V = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$, on associe le graphe $M(G)$ suivant :

- On clone chaque sommet v_i en u_i, sans relier les u_i entre eux.
- On ajoute un sommet w relié à tous les u_i.

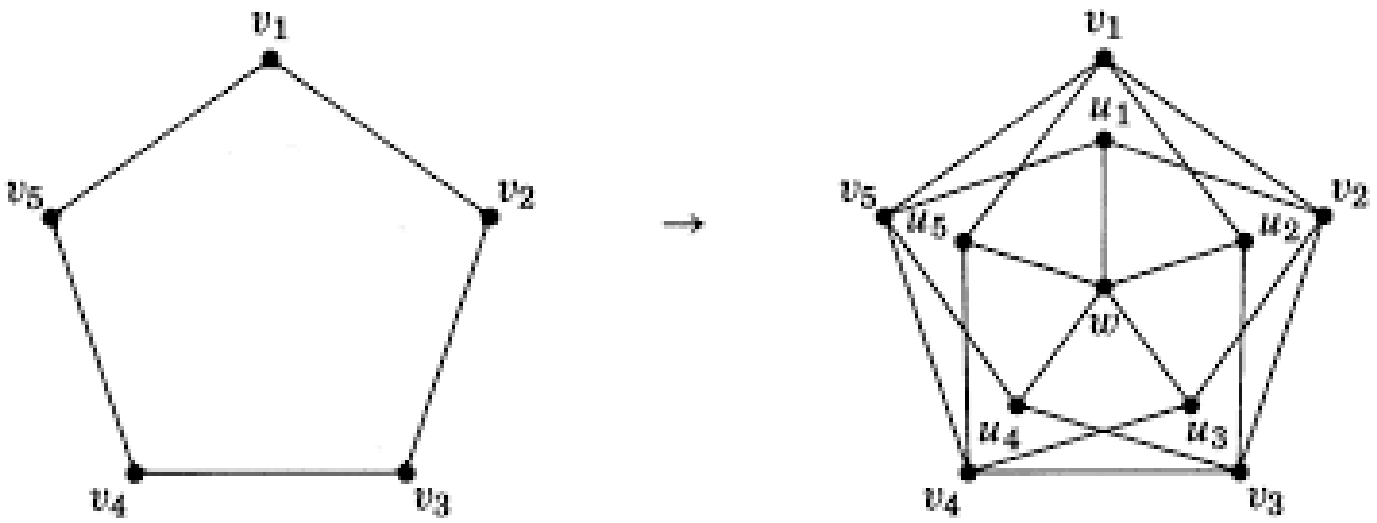


$M(G)$ ne crée pas de triangle et vérifie $\chi(M(G)) = \chi(G) + 1$

Mycielski

A tout graphe G sur l'ensemble de sommets $V = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$, on associe le graphe $M(G)$ suivant :

- On clone chaque sommet v_i en u_i, sans relier les u_i entre eux.
- On ajoute un sommet w relié à tous les u_i.



$M(G)$ ne crée pas de triangle et vérifie $\chi(M(G)) = \chi(G) + 1$

Peut-on éviter les longs cycles ?

Erdős

Théorème (Erdős 1959) : Il existe des graphes sans cycles de longueur au plus k et de nombre chromatique au moins k.

Erdős

Théorème (Erdős 1959) : Il existe des graphes sans cycles de longueur au plus k et de nombre chromatique au moins k.

- Choisir $\varepsilon > 0$ assez petit.

Erdős

Théorème (Erdős 1959) : Il existe des graphes sans cycles de longueur au plus k et de nombre chromatique au moins k.

- Choisir $\varepsilon > 0$ assez petit.
- Tirer un graphe aléatoire G de degré moyen n^{ε}.

Erdős

Théorème (Erdős 1959) : Il existe des graphes sans cycles de longueur au plus k et de nombre chromatique au moins k.

- Choisir $\varepsilon > 0$ assez petit.
- Tirer un graphe aléatoire G de degré moyen n^{ε}.
- Le nombre de cycles de longueur au plus k est $o(n)$.

Erdős

Théorème (Erdős 1959) : Il existe des graphes sans cycles de longueur au plus k et de nombre chromatique au moins k.

- Choisir $\varepsilon > 0$ assez petit.
- Tirer un graphe aléatoire G de degré moyen n^{ε}.
- Le nombre de cycles de longueur au plus k est $o(n)$.
- La taille maximum d'un stable est $o(n)$.

Erdős

Théorème (Erdős 1959) : Il existe des graphes sans cycles de longueur au plus k et de nombre chromatique au moins k.

- Choisir $\varepsilon > 0$ assez petit.
- Tirer un graphe aléatoire G de degré moyen n^{ε}.
- Le nombre de cycles de longueur au plus k est $o(n)$.
- La taille maximum d'un stable est $o(n)$.
- Notons G' le graphe G privé de ses cycles de taille au plus k.

Erdős

Théorème (Erdős 1959) : Il existe des graphes sans cycles de longueur au plus k et de nombre chromatique au moins k.

- Choisir $\varepsilon > 0$ assez petit.
- Tirer un graphe aléatoire G de degré moyen n^{ε}.
- Le nombre de cycles de longueur au plus k est $o(n)$.
- La taille maximum d'un stable est $o(n)$.
- Notons G' le graphe G privé de ses cycles de taille au plus k.
- On a $\chi(G') \geq (n - o(n))/o(n)$ donc non borné et G' sans cycles courts.

Erdős

Théorème (Erdős 1959) : Il existe des graphes sans cycles de longueur au plus k et de nombre chromatique au moins k.

- Choisir $\varepsilon > 0$ assez petit.
- Tirer un graphe aléatoire G de degré moyen n^{ε}.
- Le nombre de cycles de longueur au plus k est $o(n)$.
- La taille maximum d'un stable est $o(n)$.
- Notons G' le graphe G privé de ses cycles de taille au plus k.
- On a $\chi(G') \geq (n - o(n))/o(n)$ donc non borné et G' sans cycles courts.

Alon et al. (2015) Construction déterministe.

Borsuk-Ulam

On se fixe une dimension d et un $\varepsilon > 0$ assez petit.

Borsuk-Ulam

On se fixe une dimension d et un $\varepsilon > 0$ assez petit.
Le *graphe de Borsuk* $B(d, \varepsilon)$ a pour sommets la sphère S^d, deux sommets x, y étant liés s'ils sont presque antipodaux ($x.y < -1 + \varepsilon$).

Borsuk-Ulam

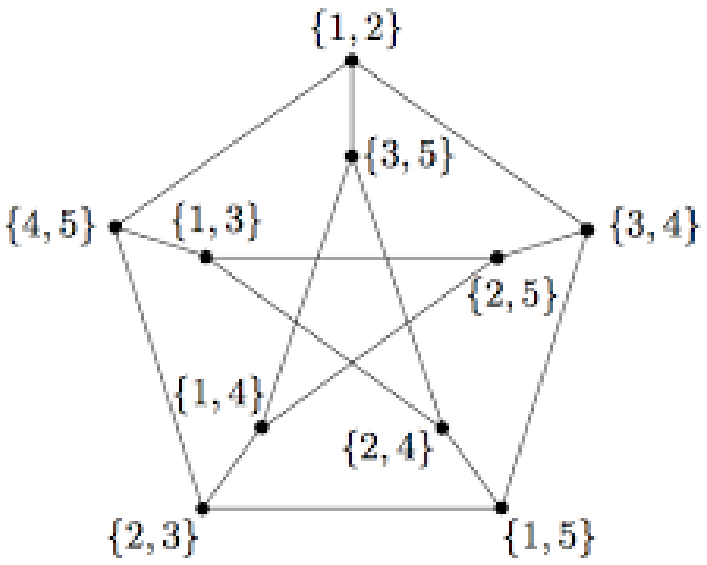
On se fixe une dimension d et un $\varepsilon > 0$ assez petit.
Le *graphe de Borsuk* $B(d, \varepsilon)$ a pour sommets la sphère S^d, deux sommets x, y étant liés s'ils sont presque antipodaux ($x.y < -1 + \varepsilon$).
Théorème Borsuk and Ulam (1933) : $\chi(B(d, \varepsilon)) = d + 2$

Borsuk-Ulam

On se fixe une dimension d et un $\varepsilon > 0$ assez petit.
Le *graphe de Borsuk* $B(d, \varepsilon)$ a pour sommets la sphère S^d, deux sommets x, y étant liés s'ils sont presque antipodaux ($x.y < -1 + \varepsilon$).
Théorème Borsuk and Ulam (1933) : $\chi(B(d, \varepsilon)) = d + 2$
Graphe de Kneser $K(d, n)$ on relie les couples de parties disjointes de taille d d'un ensemble de taille n (ici $d = 2$ et $n = 5$).

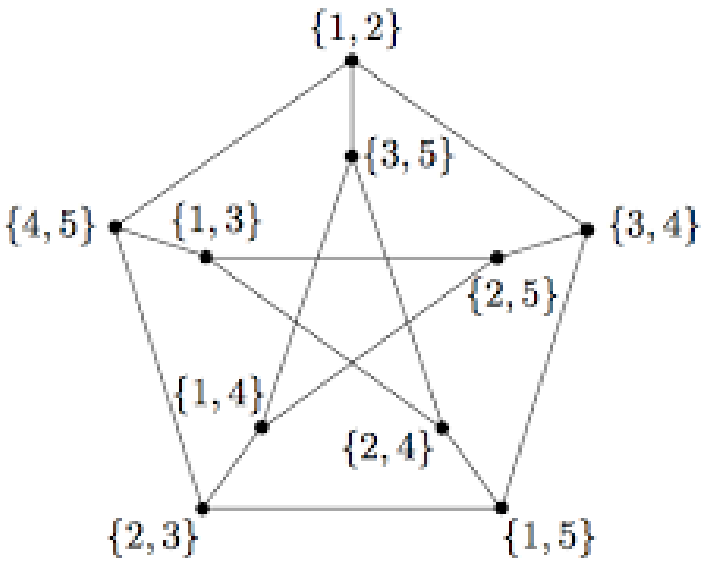
Borsuk-Ulam

On se fixe une dimension d et un $\varepsilon > 0$ assez petit.
Le *graphe de Borsuk* $B(d, \varepsilon)$ a pour sommets la sphère S^d, deux sommets x, y étant liés s'ils sont presque antipodaux ($x.y < -1 + \varepsilon$).
Théorème Borsuk and Ulam (1933) : $\chi(B(d, \varepsilon)) = d + 2$
Graphe de Kneser $K(d, n)$ on relie les couples de parties disjointes de taille d d'un ensemble de taille n (ici $d = 2$ et $n = 5$).



Borsuk-Ulam

On se fixe une dimension d et un $\varepsilon > 0$ assez petit.
Le *graphe de Borsuk* $B(d, \varepsilon)$ a pour sommets la sphère S^d, deux sommets x, y étant liés s'ils sont presque antipodaux ($x.y < -1 + \varepsilon$).
Théorème Borsuk and Ulam (1933) : $\chi(B(d, \varepsilon)) = d + 2$
Graphe de Kneser $K(d, n)$ on relie les couples de parties disjointes de taille d d'un ensemble de taille n (ici $d = 2$ et $n = 5$).



Lovász (1978) $\chi(K(n, d)) = n - 2d + 2$

Une borne inférieure unique ?

Existe-t-il une raison unifiée pour laquelle $\chi(G) \geq k$?

Une borne inférieure unique ?

Existe-t-il une raison unifiée pour laquelle $\chi(G) \geq k$?
La relation d'homomorphisme définit un ordre partiel sur les graphes.

Une borne inférieure unique ?

Existe-t-il une raison unifiée pour laquelle $\chi(G) \geq k$?
La relation d'homomorphisme définit un ordre partiel sur les graphes.
Le *produit* $G \times H$ est le plus grand graphe Z tel que $Z \to G$ et $Z \to H$.

Une borne inférieure unique ?

Existe-t-il une raison unifiée pour laquelle $\chi(G) \geq k$?
La relation d'homomorphisme définit un ordre partiel sur les graphes.
Le *produit* $G \times H$ est le plus grand graphe Z tel que $Z \to G$ et $Z \to H$.
Conjecture Hedetniemi (1966)

$$\chi(G \times H) = \min(\chi(G), \chi(H))$$

Une borne inférieure unique ?

Existe-t-il une raison unifiée pour laquelle $\chi(G) \geq k$?
La relation d'homomorphisme définit un ordre partiel sur les graphes.
Le *produit* $G \times H$ est le plus grand graphe Z tel que $Z \to G$ et $Z \to H$.
Conjecture Hedetniemi (1966)

$$\chi(G \times H) = \min(\chi(G), \chi(H))$$

Soit $f(k)$ le minimum de $\chi(G \times H)$ où $\chi(G) = \chi(H) = k$.

Une borne inférieure unique ?

Existe-t-il une raison unifiée pour laquelle $\chi(G) \geq k$?
La relation d'homomorphisme définit un ordre partiel sur les graphes.
Le *produit* $G \times H$ est le plus grand graphe Z tel que $Z \to G$ et $Z \to H$.
Conjecture Hedetniemi (1966)

$$\chi(G \times H) = \min(\chi(G), \chi(H))$$

Soit $f(k)$ le minimum de $\chi(G \times H)$ où $\chi(G) = \chi(H) = k$.
Théorème Poljak and Rődl (1981) Soit f tend vers l'infini, soit elle est bornée

Une borne inférieure unique ?

Existe-t-il une raison unifiée pour laquelle $\chi(G) \geq k$?
La relation d'homomorphisme définit un ordre partiel sur les graphes.
Le *produit* $G \times H$ est le plus grand graphe Z tel que $Z \to G$ et $Z \to H$.
Conjecture Hedetniemi (1966)

$$\chi(G \times H) = \min(\chi(G), \chi(H))$$

Soit $f(k)$ le minimum de $\chi(G \times H)$ où $\chi(G) = \chi(H) = k$.
Théorème Poljak and Rődl (1981) Soit f tend vers l'infini, soit elle est bornée par 9.

Une borne inférieure unique ?

Existe-t-il une raison unifiée pour laquelle $\chi(G) \geq k$?
La relation d'homomorphisme définit un ordre partiel sur les graphes.
Le *produit* $G \times H$ est le plus grand graphe Z tel que $Z \to G$ et $Z \to H$.
Conjecture Hedetniemi (1966)

$$\chi(G \times H) = \min(\chi(G), \chi(H))$$

Soit $f(k)$ le minimum de $\chi(G \times H)$ où $\chi(G) = \chi(H) = k$.
Théorème Poljak and Rődl (1981) Soit f tend vers l'infini, soit elle est bornée par 9.

Ajoutons des hypothèses...

Le cas dense

Le problème d'Erdős et Simonovits

Les constructions précédentes ont degré moyen $o(n)$.

Le problème d'Erdős et Simonovits

Les constructions précédentes ont degré moyen $o(n)$.
Problème Erdős-Simonovits (1973) A partir de quel c les graphes sans triangles de degré minimum $> c.n$ ont nombre chromatique borné ?

Le problème d'Erdős et Simonovits

Les constructions précédentes ont degré moyen $o(n)$.
Problème Erdős-Simonovits (1973) A partir de quel c les graphes sans triangles de degré minimum $> c.n$ ont nombre chromatique borné ?

- degré au moins $2n/5$ implique biparti. (Andrásfai 1964)

Le problème d'Erdős et Simonovits

Les constructions précédentes ont degré moyen $o(n)$.
Problème Erdős-Simonovits (1973) A partir de quel c les graphes sans triangles de degré minimum $> c.n$ ont nombre chromatique borné ?

- degré au moins $2n/5$ implique biparti. (Andrásfai 1964)
- Hajnal (1972) propose des constructions de degré minimum $(1/3 - \varepsilon)n$ et grand χ (il cache un petit Borsuk).

Le problème d'Erdős et Simonovits

Les constructions précédentes ont degré moyen $o(n)$.
Problème Erdős-Simonovits (1973) A partir de quel c les graphes sans triangles de degré minimum $> c.n$ ont nombre chromatique borné ?

- degré au moins $2n/5$ implique biparti. (Andrásfai 1964)
- Hajnal (1972) propose des constructions de degré minimum $(1/3 - \varepsilon)n$ et grand χ (il cache un petit Borsuk).
- $10n/29$ implique $\chi \leq 3$. (Jin 1995)

Le problème d'Erdős et Simonovits

Les constructions précédentes ont degré moyen $o(n)$.
Problème Erdős-Simonovits (1973) A partir de quel c les graphes sans triangles de degré minimum $> c.n$ ont nombre chromatique borné ?

- degré au moins $2n/5$ implique biparti. (Andrásfai 1964)
- Hajnal (1972) propose des constructions de degré minimum $(1/3 - \varepsilon)n$ et grand χ (il cache un petit Borsuk).
- $10n/29$ implique $\chi \leq 3$. (Jin 1995)
- $(1/3 + \varepsilon)n$ implique χ borné. Thomassen (2002) et Łuczak (2002)

Le problème d'Erdős et Simonovits

Les constructions précédentes ont degré moyen $o(n)$.
Problème Erdős-Simonovits (1973) A partir de quel c les graphes sans triangles de degré minimum $> c.n$ ont nombre chromatique borné ?

- degré au moins $2n/5$ implique biparti. (Andrásfai 1964)
- Hajnal (1972) propose des constructions de degré minimum $(1/3 - \varepsilon)n$ et grand χ (il cache un petit Borsuk).
- $10n/29$ implique $\chi \leq 3$. (Jin 1995)
- $(1/3 + \varepsilon)n$ implique χ borné. Thomassen (2002) et Łuczak (2002)

Théorème (Brandt-T. 2004) degré minimum $n/3$ implique $\chi \leq 4$.

Le problème d'Erdős et Simonovits

Les constructions précédentes ont degré moyen $o(n)$.
Problème Erdős-Simonovits (1973) A partir de quel c les graphes sans triangles de degré minimum $> c.n$ ont nombre chromatique borné ?

- degré au moins $2n/5$ implique biparti. (Andrásfai 1964)
- Hajnal (1972) propose des constructions de degré minimum $(1/3 - \varepsilon)n$ et grand χ (il cache un petit Borsuk).
- $10n/29$ implique $\chi \leq 3$. (Jin 1995)
- $(1/3 + \varepsilon)n$ implique χ borné. Thomassen (2002) et Łuczak (2002)

Théorème (Brandt-T. 2004) degré minimum $n/3$ implique $\chi \leq 4$.

Preuve peu éclairante : on caractérise la classe

Crash course en apprentissage

On a une population finie V sur laquelle on a identifié un ensemble E de caractéristiques, disons $E \subseteq 2^V$.

Crash course en apprentissage

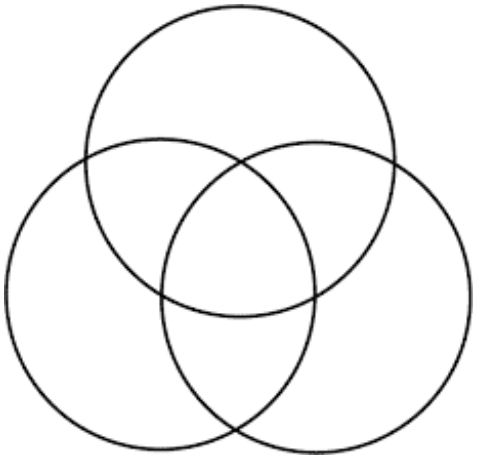
On a une population finie V sur laquelle on a identifié un ensemble E de caractéristiques, disons $E \subseteq 2^V$.
On veut extraire un ε-échantillon représentatif de V, i.e. un sous-ensemble borné B de V qui ε-approxime bien tous les $e \in E$.

Crash course en apprentissage

On a une population finie V sur laquelle on a identifié un ensemble E de caractéristiques, disons $E \subseteq 2^V$.
On veut extraire un ε-échantillon représentatif de V, i.e. un sous-ensemble borné B de V qui ε-approxime bien tous les $e \in E$.
Précisément, on veut que l'écart entre $|B \cap e|/|B|$ et $|e|/|V|$ soit d'au plus ε.

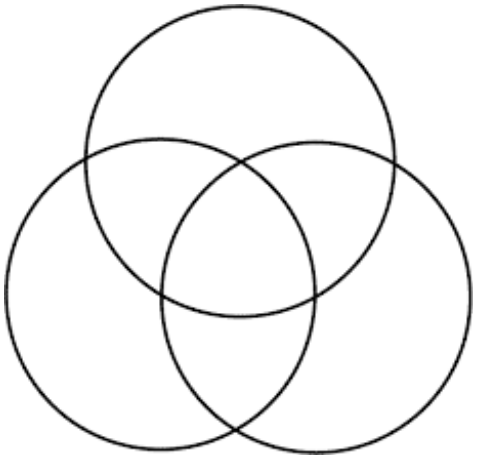
Crash course en apprentissage

On a une population finie V sur laquelle on a identifié un ensemble E de caractéristiques, disons $E \subseteq 2^V$.
On veut extraire un ε-échantillon représentatif de V, i.e. un sous-ensemble borné B de V qui ε-approxime bien tous les $e \in E$.
Précisément, on veut que l'écart entre $|B \cap e|/|B|$ et $|e|/|V|$ soit d'au plus ε.



Crash course en apprentissage

On a une population finie V sur laquelle on a identifié un ensemble E de caractéristiques, disons $E \subseteq 2^V$.
On veut extraire un ε-échantillon représentatif de V, i.e. un sous-ensemble borné B de V qui ε-approxime bien tous les $e \in E$.
Précisément, on veut que l'écart entre $|B \cap e|/|B|$ et $|e|/|V|$ soit d'au plus ε.



Théorème Il existe un ϵ-échantillon de taille au plus $f(\varepsilon, d)$ où d est la taille maximum d'un diagramme de Venn de E.

Preuve du seuil n/3 (Łuczak+T. 2010)

Lemme (Brandt) Un graphe G sans triangle de degré au moins $n/3$ et nombre chromatique au moins 4 ne peut contenir de cube.

Preuve du seuil n/3 (Łuczak+T. 2010)

Lemme (Brandt) Un graphe G sans triangle de degré au moins $n/3$ et nombre chromatique au moins 4 ne peut contenir de cube.

- Population : ensemble V des sommets de G

Preuve du seuil n/3 (Łuczak+T. 2010)

Lemme (Brandt) Un graphe G sans triangle de degré au moins $n/3$ et nombre chromatique au moins 4 ne peut contenir de cube.

- Population : ensemble V des sommets de G
- Caractéristiques : ensemble des voisinages des sommets de V.

Preuve du seuil n/3 (Łuczak+T. 2010)

Lemme (Brandt) Un graphe G sans triangle de degré au moins $n/3$ et nombre chromatique au moins 4 ne peut contenir de cube.

- Population : ensemble V des sommets de G
- Caractéristiques : ensemble des voisinages des sommets de V.
- $\varepsilon = 1/6$ disons.

Preuve du seuil n/3 (Łuczak+T. 2010)

Lemme (Brandt) Un graphe G sans triangle de degré au moins $n/3$ et nombre chromatique au moins 4 ne peut contenir de cube.

- Population : ensemble V des sommets de G
- Caractéristiques : ensemble des voisinages des sommets de V.
- $\varepsilon = 1/6$ disons.
- Pas de 4-diagramme de Venn (car pas de cube).

Preuve du seuil n/3 (Łuczak+T. 2010)

Lemme (Brandt) Un graphe G sans triangle de degré au moins $n/3$ et nombre chromatique au moins 4 ne peut contenir de cube.

- Population : ensemble V des sommets de G
- Caractéristiques : ensemble des voisinages des sommets de V.
- $\varepsilon = 1/6$ disons.
- Pas de 4-diagramme de Venn (car pas de cube).
- Il existe un $1/6$-échantillon B de taille bornée.

Preuve du seuil n/3 (Łuczak+T. 2010)

Lemme (Brandt) Un graphe G sans triangle de degré au moins $n/3$ et nombre chromatique au moins 4 ne peut contenir de cube.

- Population : ensemble V des sommets de G
- Caractéristiques : ensemble des voisinages des sommets de V.
- $\varepsilon = 1/6$ disons.
- Pas de 4-diagramme de Venn (car pas de cube).
- Il existe un $1/6$-échantillon B de taille bornée.
- B intersecte toutes les caractéristiques.

Preuve du seuil n/3 (Łuczak+T. 2010)

Lemme (Brandt) Un graphe G sans triangle de degré au moins $n/3$ et nombre chromatique au moins 4 ne peut contenir de cube.

- Population : ensemble V des sommets de G
- Caractéristiques : ensemble des voisinages des sommets de V.
- $\varepsilon = 1/6$ disons.
- Pas de 4-diagramme de Venn (car pas de cube).
- Il existe un $1/6$-échantillon B de taille bornée.
- B intersecte toutes les caractéristiques.
- B domine G.

Preuve du seuil n/3 (Łuczak+T. 2010)

Lemme (Brandt) Un graphe G sans triangle de degré au moins $n/3$ et nombre chromatique au moins 4 ne peut contenir de cube.

- Population : ensemble V des sommets de G
- Caractéristiques : ensemble des voisinages des sommets de V.
- $\varepsilon = 1/6$ disons.
- Pas de 4-diagramme de Venn (car pas de cube).
- Il existe un $1/6$-échantillon B de taille bornée.
- B intersecte toutes les caractéristiques.
- B domine G.
- G a nombre chromatique au plus $|B|$.

La suite

Le complexe des stables

Conjecture Kalai-Meshulam (2012) Tout graphe G de nombre chromatique $f(k)$ contient un sous-graphe dont la somme des nombres de Betti du complexe des stables est au moins k.

Le complexe des stables

Conjecture Kalai-Meshulam (2012) Tout graphe G de nombre chromatique $f(k)$ contient un sous-graphe dont la somme des nombres de Betti du complexe des stables est au moins k.
Théorème Bonamy, Charbit, T. (2014) $f(2)$ existe : G contient un cycle induit de longueur 0 mod 3.

Le complexe des stables

Conjecture Kalai-Meshulam (2012) Tout graphe G de nombre chromatique $f(k)$ contient un sous-graphe dont la somme des nombres de Betti du complexe des stables est au moins k.
Théorème Bonamy, Charbit, T. (2014) $f(2)$ existe : G contient un cycle induit de longueur 0 mod 3.
Théorème Scott et Seymour (2015) G sans triangle de nombre chromatique $f(k)$ contient k longueurs de cycles consécutives.

Le complexe des stables

Conjecture Kalai-Meshulam (2012) Tout graphe G de nombre chromatique $f(k)$ contient un sous-graphe dont la somme des nombres de Betti du complexe des stables est au moins k.
Théorème Bonamy, Charbit, T. (2014) $f(2)$ existe : G contient un cycle induit de longueur 0 mod 3.
Théorème Scott et Seymour (2015) G sans triangle de nombre chromatique $f(k)$ contient k longueurs de cycles consécutives.
To be continued...