Percolation sur des triangulations aléatoires

Loïc Richier

UMPA, École Normale Supérieure de Lyon

Colloque Inter'Actions - 27 Mai 2016

Cartes

Motivations :

- Combinatoire : énumération, théorème des quatre couleurs.

Cartes

Motivations :

- Combinatoire : énumération, théorème des quatre couleurs.
- Physique théorique : intégrales de matrices, théorie de la gravité quantique (en dimension 2).

Cartes

Motivations :

- Combinatoire : énumération, théorème des quatre couleurs.
- Physique théorique : intégrales de matrices, théorie de la gravité quantique (en dimension 2).
- Algèbre : hiérarchie intégrable, théorie des représentations.

Cartes

Motivations :

- Combinatoire : énumération, théorème des quatre couleurs.
- Physique théorique : intégrales de matrices, théorie de la gravité quantique (en dimension 2).
- Algèbre : hiérarchie intégrable, théorie des représentations.
- Probabilités : modèle de surface discrète aléatoire.

Cartes

Motivations :

- Combinatoire : énumération, théorème des quatre couleurs.
- Physique théorique : intégrales de matrices, théorie de la gravité quantique (en dimension 2).
- Algèbre : hiérarchie intégrable, théorie des représentations.
- Probabilités : modèle de surface discrète aléatoire.

But : Comprendre le comportement de modèles de physique statistique (marche aléatoire, **percolation**, modèle d'Ising...) sur un réseau aléatoire infini "uniforme".

Carte planaire

Définition

Une carte planaire est un plongement propre d'un graphe fini connexe dans la sphère $\mathbb{S}^2$ *(à homéomorphisme préservant l'orientation près).*

Carte planaire

Définition

Une carte planaire est un plongement propre d'un graphe fini connexe dans la sphère $\mathbb{S}^2$ *(à homéomorphisme préservant l'orientation près).*

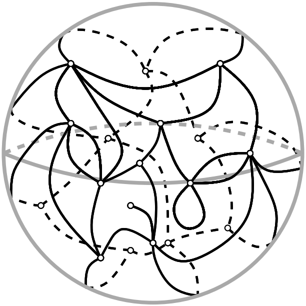


Figure: Une carte planaire.

Carte planaire

Définition

Une carte planaire est un plongement propre d'un graphe fini connexe dans la sphère $\mathbb{S}^2$ (à homéomorphisme préservant l'orientation près).

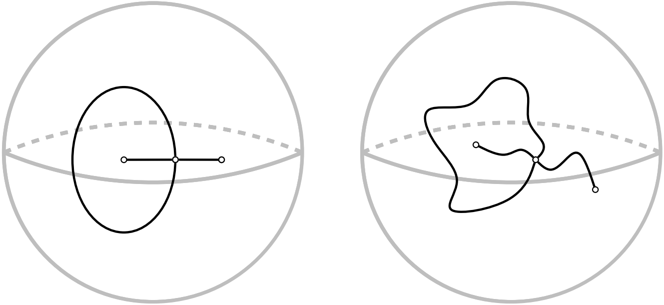


Figure: Deux représentants **isomorphes** de la même carte planaire.

Carte planaire

Définition

Une carte planaire est un plongement propre d'un graphe fini connexe dans la sphère $\mathbb{S}^2$ *(à homéomorphisme préservant l'orientation près).*

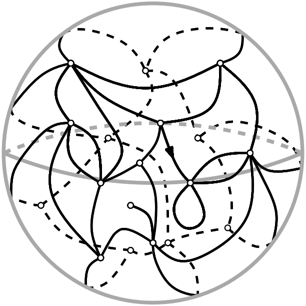


Figure: Une carte planaire **enracinée**.

Carte planaire

Définition

Une carte planaire est un plongement propre d'un graphe fini connexe dans la sphère $\mathbb{S}^2$ (à homéomorphisme préservant l'orientation près).

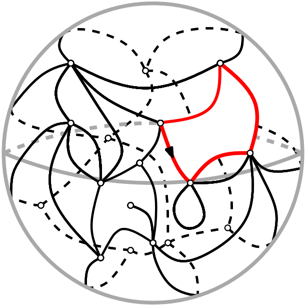


Figure: Une face de degré 4.

Carte planaire

Définition

Une carte planaire est le recollement d'un nombre fini de polygones formant une sphère topologique.

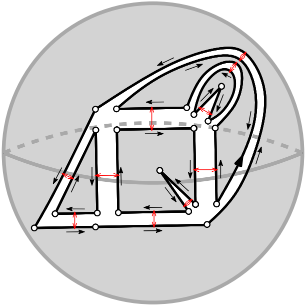


Figure: Un recollement de polygones formant une carte planaire.

Carte planaire

Définition

Une carte planaire est le recollement d'un nombre fini de polygones formant une sphère topologique.

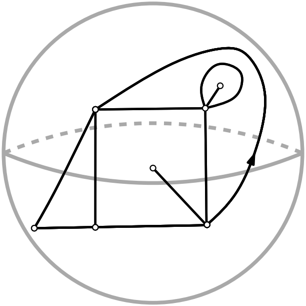


Figure: Un recollement de polygones formant une carte planaire.

Topologie locale

$\mathcal{M}^f = \{$cartes planaires enracinées$\}$.

Topologie locale

$\mathcal{M}^f = \{$cartes planaires enracinées$\}$.

Définition

La topologie locale sur $\mathcal{M}^f$ est induite par la distance d_{loc} définie pour tout $\boldsymbol{m}, \boldsymbol{m}' \in \mathcal{M}^f$ par :

$$d_{loc}\left(\boldsymbol{m}, \boldsymbol{m}'\right) := \left(1 + \sup\left\{r \geq 0 \mid B_r(\boldsymbol{m}) \simeq B_r(\boldsymbol{m}')\right\}\right)^{-1}.$$

Topologie locale

$\mathcal{M}^f = \{$cartes planaires enracinées$\}$.

Définition

La topologie locale sur $\mathcal{M}^f$ est induite par la distance d_{loc} définie pour tout $\boldsymbol{m}, \boldsymbol{m}' \in \mathcal{M}^f$ par :

$$d_{loc}\left(\boldsymbol{m}, \boldsymbol{m}'\right) := \left(1 + \sup\left\{r \geq 0 \mid B_r(\boldsymbol{m}) \simeq B_r(\boldsymbol{m}')\right\}\right)^{-1}.$$

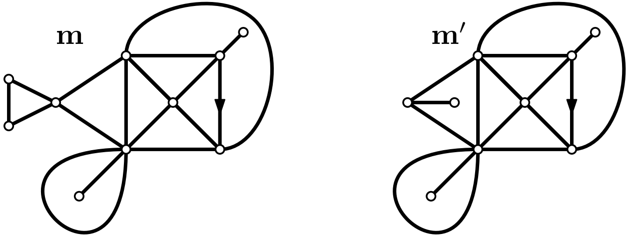


Figure: La distance locale entre $\mathbf{m}$ et $\mathbf{m}'$.

Topologie locale

$\mathcal{M}^f = \{$cartes planaires enracinées$\}$.

Définition

La topologie locale sur $\mathcal{M}^f$ est induite par la distance d_{loc} définie pour tout $\boldsymbol{m}, \boldsymbol{m}' \in \mathcal{M}^f$ par :

$$d_{loc}\left(\boldsymbol{m}, \boldsymbol{m}'\right) := \left(1 + \sup\left\{r \geq 0 \mid B_r(\boldsymbol{m}) \simeq B_r(\boldsymbol{m}')\right\}\right)^{-1}.$$

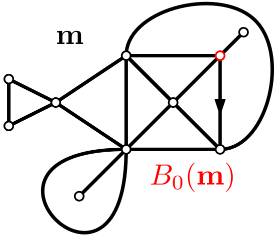


Figure: La distance locale entre $\mathbf{m}$ et $\mathbf{m}'$.

Topologie locale

$\mathcal{M}^f = \{$cartes planaires enracinées$\}$.

Définition

La topologie locale sur $\mathcal{M}^f$ est induite par la distance d_{loc} définie pour tout $\boldsymbol{m}, \boldsymbol{m}' \in \mathcal{M}^f$ par :

$$d_{loc}\left(\boldsymbol{m}, \boldsymbol{m}'\right) := \left(1 + \sup\left\{r \geq 0 \mid B_r(\boldsymbol{m}) \simeq B_r(\boldsymbol{m}')\right\}\right)^{-1}.$$

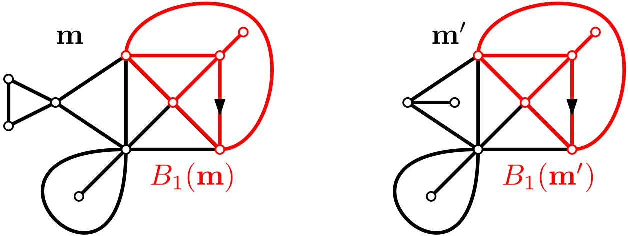


Figure: La distance locale entre $\mathbf{m}$ et $\mathbf{m}'$.

Topologie locale

$\mathcal{M}^f = \{$cartes planaires enracinées$\}$.

Définition

La topologie locale sur $\mathcal{M}^f$ est induite par la distance d_{loc} définie pour tout $\boldsymbol{m}, \boldsymbol{m}' \in \mathcal{M}^f$ par :

$$d_{loc}\left(\boldsymbol{m}, \boldsymbol{m}'\right) := \left(1 + \sup\left\{r \geq 0 \mid B_r(\boldsymbol{m}) \simeq B_r(\boldsymbol{m}')\right\}\right)^{-1}.$$

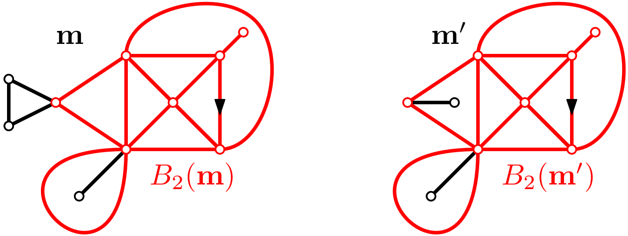


Figure: La distance locale entre $\mathbf{m}$ et $\mathbf{m}'$.

Topologie locale

$\mathcal{M}^f = \{$cartes planaires enracinées$\}$.

Définition

La topologie locale sur $\mathcal{M}^f$ est induite par la distance d_{loc} définie pour tout $\boldsymbol{m}, \boldsymbol{m}' \in \mathcal{M}^f$ par :

$$d_{loc}\left(\boldsymbol{m}, \boldsymbol{m}'\right) := \left(1 + \sup\left\{r \geq 0 \mid B_r(\boldsymbol{m}) \simeq B_r(\boldsymbol{m}')\right\}\right)^{-1}.$$

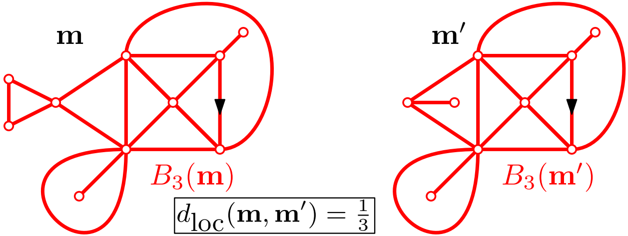


Figure: La distance locale entre **m** et **m**′.

Triangulation uniforme infinie du plan

- Triangulation $=$ carte dont toutes les faces ont degré 3.

Triangulation uniforme infinie du plan

- Triangulation $=$ carte dont toutes les faces ont degré 3.
- Triangulation 2-connexe $=$ sans boucle.

Triangulation uniforme infinie du plan

- Triangulation = carte dont toutes les faces ont degré 3.
- Triangulation 2-connexe = sans boucle.
- $\mathcal{M}_n = \{$triangulations enracinées à n sommets$\}$.

Triangulation uniforme infinie du plan

- Triangulation $=$ carte dont toutes les faces ont degré 3.
- Triangulation 2-connexe $=$ sans boucle.
- $\mathcal{M}_n = \{$triangulations enracinées à n sommets$\}$.
- $\mathbf{P}_n =$ **mesure uniforme** sur $\mathcal{M}_n$.

Triangulation uniforme infinie du plan

- Triangulation = carte dont toutes les faces ont degré 3.
- Triangulation 2-connexe = sans boucle.
- $\mathcal{M}_n = \{$triangulations enracinées à n sommets$\}$.
- $\mathbf{P}_n$ = **mesure uniforme** sur $\mathcal{M}_n$.

Théorème (Angel, Schramm '03)

Au sens faible (pour la topologie locale),

$$\mathbf{P}_n \underset{n\to+\infty}{\Longrightarrow} \mathbf{P}_\infty.$$

Triangulation uniforme infinie du plan

- Triangulation = carte dont toutes les faces ont degré 3.
- Triangulation 2-connexe = sans boucle.
- $\mathcal{M}_n = \{$triangulations enracinées à n sommets$\}$.
- $\mathbf{P}_n$ = **mesure uniforme** sur $\mathcal{M}_n$.

Théorème (Angel, Schramm '03)

Au sens faible (pour la topologie locale),

$$\mathbf{P}_n \underset{n\to+\infty}{\Longrightarrow} \mathbf{P}_\infty.$$

$\mathbf{P}_\infty$= "Uniform Infinite Planar Triangulation" (UIPT).

Plongement

$\mathbf{P}_\infty$ est supportée par les triangulations du **plan**.

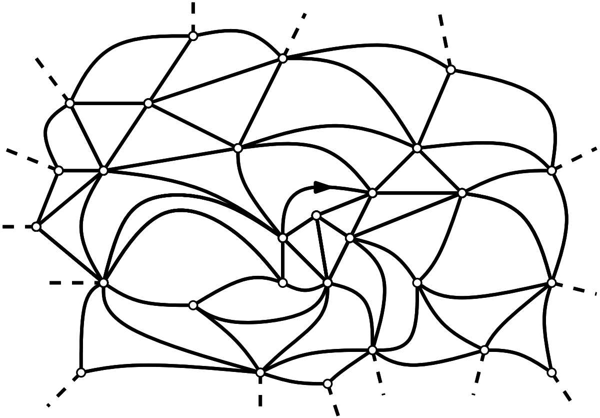


Figure: Un plongement de l'UIPT dans le plan.

Triangulation uniforme infinie du demi-plan

- Triangulation du m-gone = carte dont toutes les faces ont degré 3 sauf une, la face externe, de degré m et à **bord simple**.

Triangulation uniforme infinie du demi-plan

- Triangulation du m-gone = carte dont toutes les faces ont degré 3 sauf une, la face externe, de degré m et à **bord simple**.

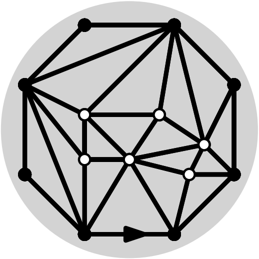


Figure: Une triangulation de l'octogone avec 6 sommets internes.

Triangulation uniforme infinie du demi-plan

- Triangulation du m-gone $=$ carte dont toutes les faces ont degré 3 sauf une, la face externe, de degré m et à **bord simple**.
- $\mathcal{M}_{n,m} = \{$triangulations du m-gone avec n sommets internes, **enracinées sur le bord**$\}$.

Triangulation uniforme infinie du demi-plan

- Triangulation du m-gone $=$ carte dont toutes les faces ont degré 3 sauf une, la face externe, de degré m et à **bord simple**.
- $\mathcal{M}_{n,m} = \{$triangulations du m-gone avec n sommets internes, **enracinées sur le bord**$\}$.
- $\mathbf{P}_{n,m} =$ **mesure uniforme** sur $\mathcal{M}_{n,m}$.

Triangulation uniforme infinie du demi-plan

- Triangulation du m-gone $=$ carte dont toutes les faces ont degré 3 sauf une, la face externe, de degré m et à **bord simple**.
- $\mathcal{M}_{n,m} = \{$triangulations du m-gone avec n sommets internes, **enracinées sur le bord**$\}$.
- $\mathbf{P}_{n,m} =$ **mesure uniforme** sur $\mathcal{M}_{n,m}$.

Théorème (Angel '04)

Au sens faible (pour la topologie locale),

$$\mathbf{P}_{n,m} \underset{n\to+\infty}{\Longrightarrow} \mathbf{P}_{\infty,m} \underset{m\to+\infty}{\Longrightarrow} \mathbf{P}_{\infty,\infty}.$$

Triangulation uniforme infinie du demi-plan

- Triangulation du m-gone = carte dont toutes les faces ont degré 3 sauf une, la face externe, de degré m et à **bord simple**.
- $\mathcal{M}_{n,m} = \{$triangulations du m-gone avec n sommets internes, **enracinées sur le bord**$\}$.
- $\mathbf{P}_{n,m}$ = **mesure uniforme** sur $\mathcal{M}_{n,m}$.

Théorème (Angel '04)

Au sens faible (pour la topologie locale),

$$\mathbf{P}_{n,m} \underset{n\to+\infty}{\Longrightarrow} \mathbf{P}_{\infty,m} \underset{m\to+\infty}{\Longrightarrow} \mathbf{P}_{\infty,\infty}.$$

$\mathbf{P}_{\infty,\infty}$= *"Uniform Infinite Half-Planar Triangulation" (UIHPT).*

Plongement

$\mathbf{P}_{\infty,\infty}$ est supportée par les triangulations du **demi-plan** à bord infini.

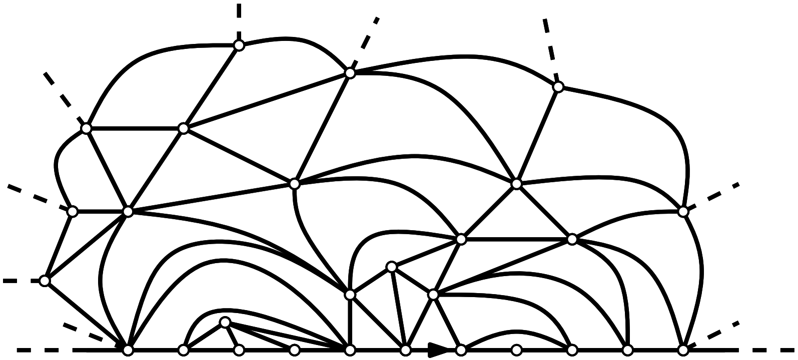


Figure: Un plongement de l'UIHPT dans le demi-plan.

Propriété de Markov spatiale

Théorème (Angel '04)

Soit M *de loi* $\mathbf{P}_{\infty,\infty}$, *et* A *la face incidente à la racine. Alors* $\mathrm{M} \setminus$ A *a une unique composante connexe infinie*

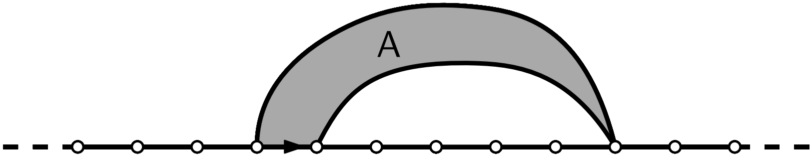


Figure: La propriété de Markov spatiale.

Propriété de Markov spatiale

Théorème (Angel '04)

Soit M *de loi* $\mathbf{P}_{\infty,\infty}$, *et* A *la face incidente à la racine. Alors* $\mathrm{M} \setminus \mathrm{A}$ *a une unique composante connexe infinie* M' *de loi* $\mathbf{P}_{\infty,\infty}$.

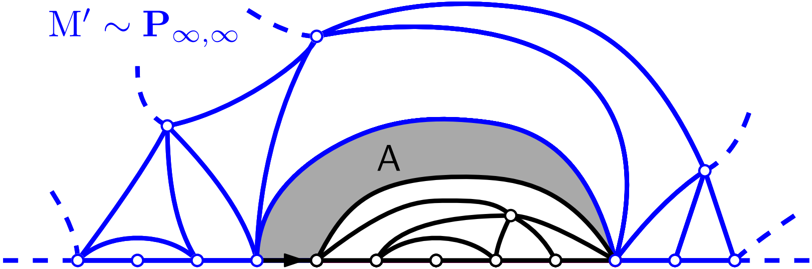
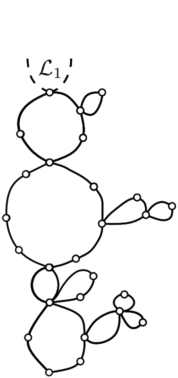


Figure: La propriété de Markov spatiale.

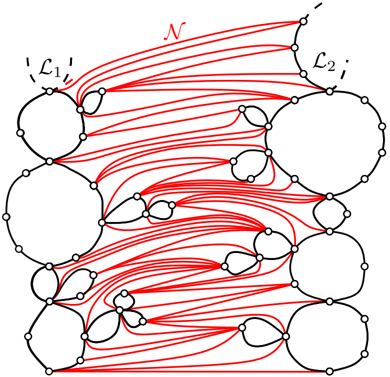
Construction alternative de l'UIHPT



Théorème

Soient $\mathcal{L}_1$ et $\mathcal{L}_2$ deux **arbres à boucles** *infinis indépendants.*

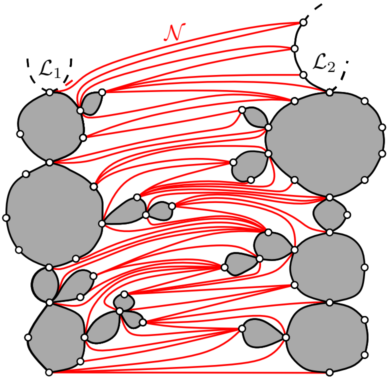
Construction alternative de l'UIHPT



Théorème

Soient $\mathcal{L}_1$ et $\mathcal{L}_2$ deux arbres à boucles infinis indépendants.
On connecte $\mathcal{L}_1$ et $\mathcal{L}_2$ par un **collier uniforme infini** $\mathcal{N}$,

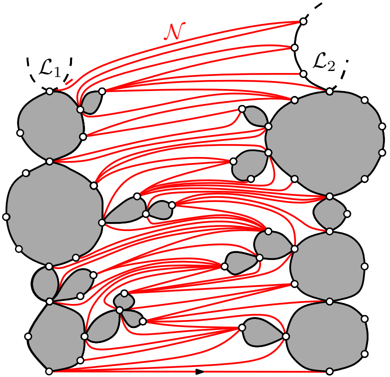
Construction alternative de l'UIHPT



Théorème

Soient $\mathcal{L}_1$ et $\mathcal{L}_2$ deux arbres à boucles infinis indépendants.
On connecte $\mathcal{L}_1$ et $\mathcal{L}_2$ par un collier uniforme infini $\mathcal{N}$, et remplit les boucles avec des **triangulations de Boltzmann** *indépendantes.*

Construction alternative de l'UIHPT



Théorème

Soient $\mathcal{L}_1$ et $\mathcal{L}_2$ deux arbres à boucles infinis indépendants.
On connecte $\mathcal{L}_1$ et $\mathcal{L}_2$ par un collier uniforme infini $\mathcal{N}$, et remplit les boucles avec des triangulations de Boltzmann indépendantes.
Alors, l'objet obtenu a loi $\mathbf{P}_{\infty,\infty}$.

Construction alternative de l'UIHPT

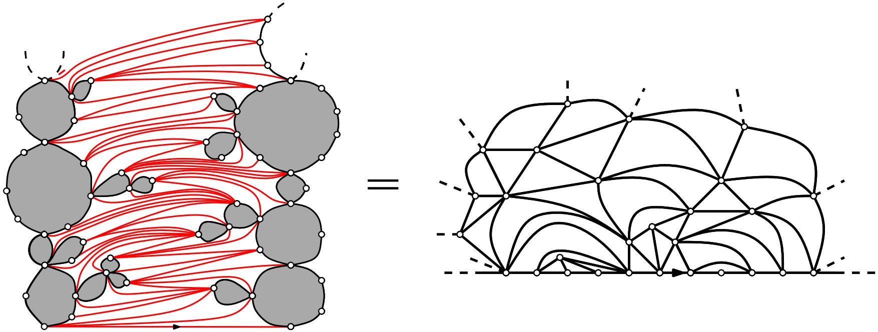


Figure: Deux constructions de l'UIHPT.

Percolation

Percolation de Bernoulli sur l'UIHPT : chaque site est ouvert (colorié en noir) avec probabilité $p \in [0, 1]$ et fermé (colorié en blanc) sinon, indépendamment des autres sites.

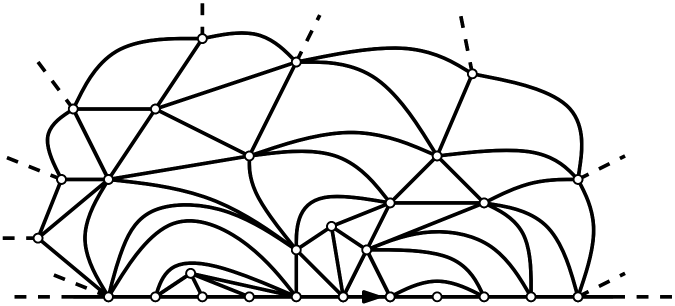


Figure: L'UIHPT.

Percolation

Percolation de Bernoulli sur l'UIHPT : chaque **site** est ouvert (colorié en noir) avec probabilité $p \in [0, 1]$ et fermé (colorié en blanc) sinon, indépendamment des autres sites.

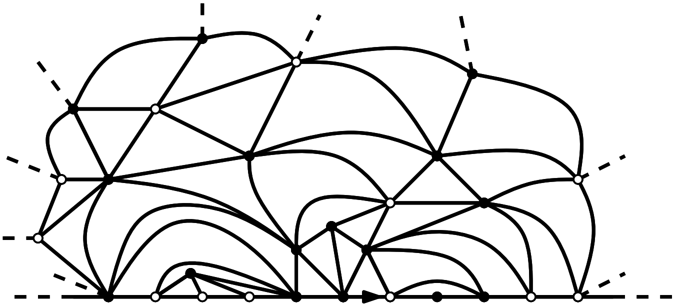


Figure: Percolation par **site** sur l'UIHPT.

Transition de phase

Le modèle de percolation admet une **transition de phase**.

Transition de phase

Le modèle de percolation admet une **transition de phase**.

- $\mathcal{C} :=$ cluster de percolation ouvert issu de l'origine.

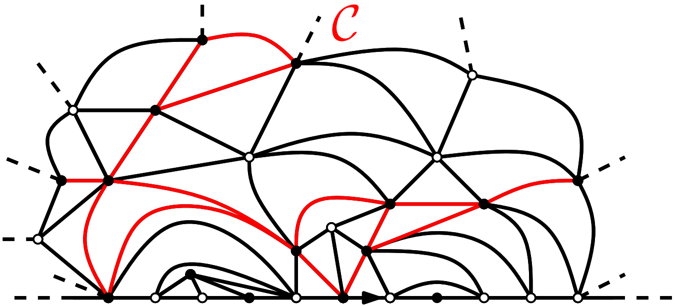


Figure: Cluster de percolation par site ouvert sur l'UIHPT.

Transition de phase

Le modèle de percolation admet une **transition de phase**.

- $\mathcal{C} :=$ cluster de percolation ouvert issu de l'origine.
- Percolation : $\{|\mathcal{C}| = +\infty\}$.

Transition de phase

Le modèle de percolation admet une **transition de phase**.

- $\mathcal{C} :=$ cluster de percolation ouvert issu de l'origine.
- Percolation : $\{|\mathcal{C}| = +\infty\}$.
- Probabilité de percolation : $\Theta(p) := \mathbb{P}_p(|\mathcal{C}| = +\infty)$.

Transition de phase

Le modèle de percolation admet une **transition de phase**.

- $\mathcal{C}$:= cluster de percolation ouvert issu de l'origine.
- Percolation : $\{|\mathcal{C}| = +\infty\}$.
- Probabilité de percolation : $\Theta(p) := \mathbb{P}_p(|\mathcal{C}| = +\infty)$.

Il existe un point critique p_c appelé **seuil de percolation** tel que

$$\begin{cases} \Theta(p) = 0 & \text{si} \quad p < p_c \\ \Theta(p) > 0 & \text{si} \quad p > p_c \end{cases}.$$

Transition de phase

Le modèle de percolation admet une **transition de phase**.

- $\mathcal{C} :=$ cluster de percolation ouvert issu de l'origine.
- Percolation : $\{|\mathcal{C}| = +\infty\}$.
- Probabilité de percolation : $\Theta(p) := \mathbb{P}_p(|\mathcal{C}| = +\infty)$.

Il existe un point critique p_c appelé **seuil de percolation** tel que

$$\begin{cases} \Theta(p) = 0 & \text{si} \quad p < p_c \\ \Theta(p) > 0 & \text{si} \quad p > p_c \end{cases}.$$

Théorème (Angel '04)

$$p_c = \frac{1}{2}.$$

De plus, il n'y a pas percolation au point critique p.s..

Question

"À quoi ressemble une triangulation uniforme infinie du demi-plan avec un cluster critique infini ?"

Cadre

Modèle de percolation **critique** par **site** sur l'**UIHPT** ($p = p_c = 1/2$).

Cadre

Modèle de percolation **critique** par **site** sur l'**UIHPT** ($p = p_c = 1/2$).

Figure: Condition au bord.

Incipient Infinite Cluster

Théorème

Pour la percolation par site sur l'UIHPT, au sens faible (pour la topologie locale),

Incipient Infinite Cluster

Théorème

Pour la percolation par site sur l'UIHPT, au sens faible (pour la topologie locale),

$$\mathbb{P}_{p_c}(\cdot \mid \|\mathcal{C}\| \geq n)$$

Incipient Infinite Cluster

Théorème

Pour la percolation par site sur l'UIHPT, au sens faible (pour la topologie locale),

$$\mathbb{P}_{p_c}(\cdot \mid \|\mathcal{C}\| \geq n) \underset{n\to+\infty}{\Longrightarrow} \mathbb{P}_{\mathsf{IIC}}.$$

Incipient Infinite Cluster

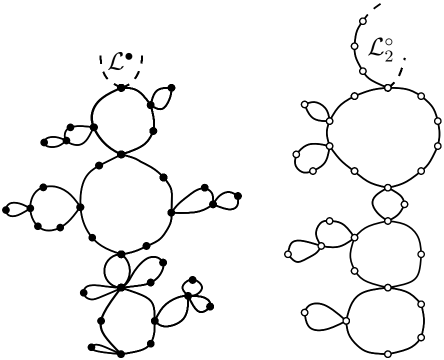
Théorème

Pour la percolation par site sur l'UIHPT, au sens faible (pour la topologie locale),

$$\mathbb{P}_{p_c}(\cdot \mid \|\mathcal{C}\| \geq n) \underset{n \to +\infty}{\Longrightarrow} \mathbb{P}_{\mathrm{IIC}}.$$

$\mathbb{P}_{\mathrm{IIC}} =$ "amas critique émergent" (Incipient Infinite Cluster).

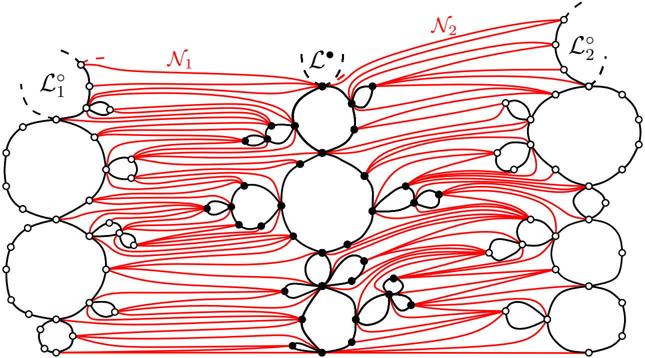
Décomposition de l'IIC



Théorème

Soient $\mathcal{L}^\bullet$, $\mathcal{L}_1^\circ$ *et* $\mathcal{L}_2^\circ$ *des* **arbres à boucles** *infinis indépendants.*

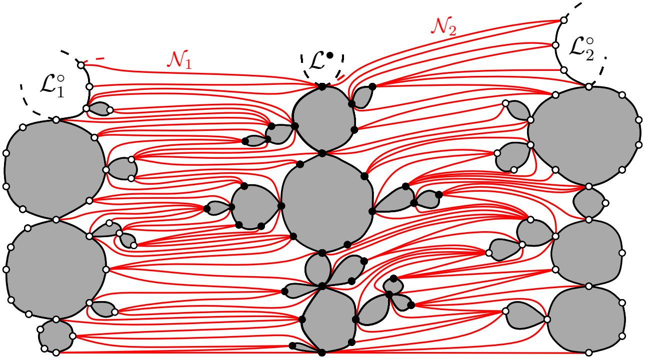
Décomposition de l'IIC



Théorème

Soient $\mathcal{L}^\bullet$, $\mathcal{L}_1^\circ$ et $\mathcal{L}_2^\circ$ des arbres à boucles infinis indépendants.
On connecte $\mathcal{L}^\bullet$, $\mathcal{L}_1^\circ$ et $\mathcal{L}_2^\circ$ par des **colliers uniformes infinis**,

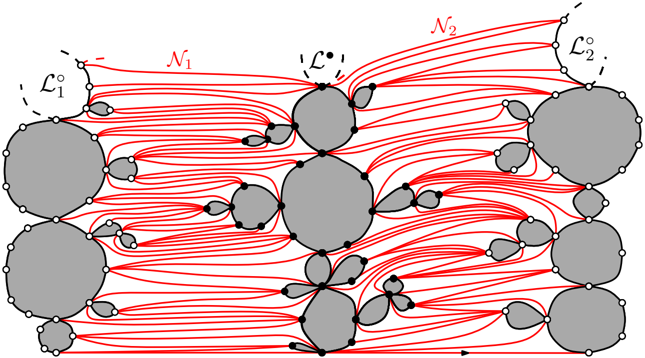
Décomposition de l'IIC



Théorème

Soient $\mathcal{L}^\bullet$, $\mathcal{L}_1^\circ$ et $\mathcal{L}_2^\circ$ des arbres à boucles infinis indépendants.
On connecte $\mathcal{L}^\bullet$, $\mathcal{L}_1^\circ$ et $\mathcal{L}_2^\circ$ par des colliers uniformes infinis, et remplit les boucles avec des **triangulations de Boltzmann** *indépendantes.*

Décomposition de l'IIC



Théorème

Soient $\mathcal{L}^\bullet$, $\mathcal{L}_1^\circ$ et $\mathcal{L}_2^\circ$ des arbres à boucles infinis indépendants. On connecte $\mathcal{L}^\bullet$, $\mathcal{L}_1^\circ$ et $\mathcal{L}_2^\circ$ par des colliers uniformes infinis, et remplit les boucles avec des triangulations de Boltzmann indépendantes. Alors, l'objet obtenu a loi $\mathbb{P}_{\mathsf{IIC}}$.

Déformation de la géométrie

L'amas critique émergent peut être obtenu par "chirurgie".

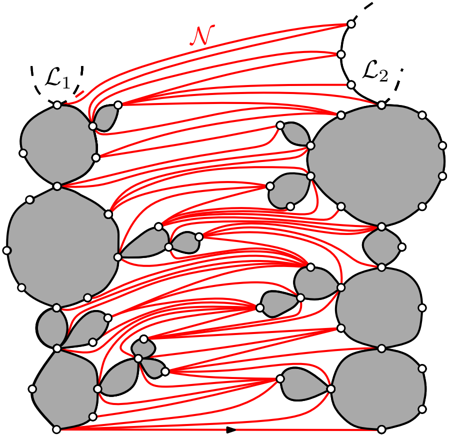


Figure: Décomposition de l'UIHPT.

Déformation de la géométrie

L'amas critique émergent peut être obtenu par "chirurgie".

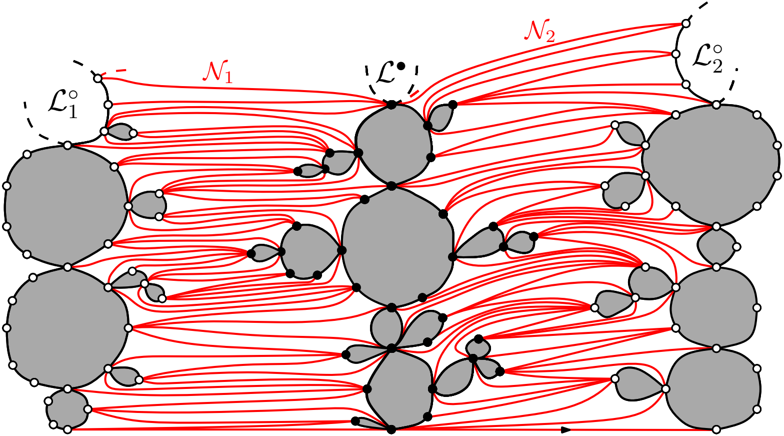


Figure: Décomposition de l'IIC.

Merci !