

# Approximation d'énergies géométriques et reconstruction de domaines

François Dayrens (Institut Camille Jordan - Lyon)

Inter'action 2016

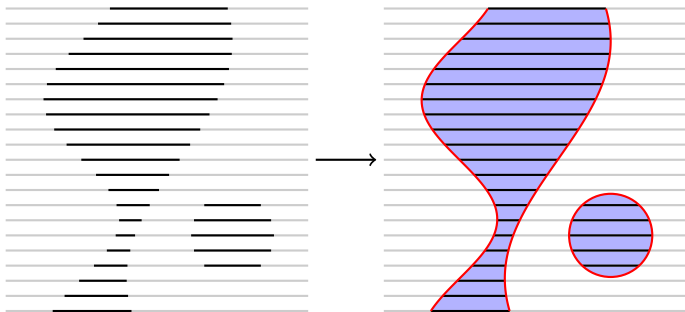
23 mai 2016



Travail en collaboration avec Élie Bretin et Simon Masnou (Lyon)

# Que reconstruit-on ?

Considérons une famille de **coupes**



Nous voulons construire un **domaine** englobant les coupes.

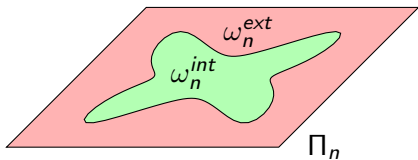
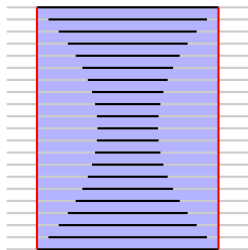
# Plan

- 1 Modèle mathématique
- 2 Approximation
- 3 Méthode numérique et expérience

# Plan

- 1 Modèle mathématique
- 2 Approximation
- 3 Méthode numérique et expérience

## Les coupes



- ▶  $\omega_n^{int} \cap \omega_n^{ext} = \emptyset$
- ▶  $\omega_n^{int}$  et  $\omega_n^{ext}$  ne sont pas nécessairement complémentaires dans  $\Pi_n$ .

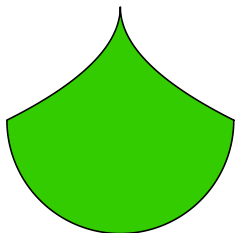
$$\omega^{int} = \bigcup_n \omega_n^{int} \quad \text{et} \quad \omega^{ext} = \bigcup_n \omega_n^{ext}$$

# Périmètre

## Périmètre

Soit  $E$  un ensemble mesurable de  $\mathbb{R}^d$ , on définit le périmètre de  $E$  par

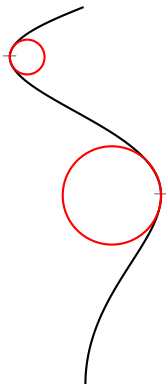
$$P(E) = TV(\mathbb{1}_E).$$



$$P(E) = \text{longueur}(\partial E)$$



$$P(E) = \text{aire}(\partial E)$$

Énergie de Willmore (dans  $\mathbb{R}^2$ )

## Courbure

Soit  $\gamma$  une courbe régulière ( $C^2$ ) de  $\mathbb{R}^2$ ,

$$\kappa = \frac{\det(\gamma'', \gamma')}{|\gamma'|^3}$$

## Énergie de Willmore

Soit  $E$  un ensemble régulier ( $C^2$ ),

$$W(E) = \int_{\partial E} \kappa^2 d\mathcal{H}^2.$$

# Énergie de Willmore (dans $\mathbb{R}^3$ )

## Courbure moyenne

Soit  $M$  une surface régulière ( $C^2$ ) de  $\mathbb{R}^3$ ,

$$H = \frac{1}{2}(\kappa_1 + \kappa_2).$$

$\kappa_1, \kappa_2$  : courbures principales.

## Énergie de Willmore

Soit  $E$  un ensemble régulier ( $C^2$ ),

$$W(E) = \int_{\partial E} H^2 d\mathcal{H}^2.$$

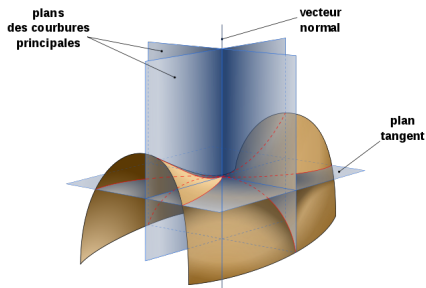


image Wikipedia



## Modélisation générale

## Périmètre

$$P(E) = TV(\mathbb{1}_E)$$

$TV$  : variation totale des  
fonctions à variation bornée

## Énergie de Willmore

$$W(E) = \int_{\partial E} H^2 d\mathcal{H}^{d-1}$$

$H$  : courbure moyenne de  
l'hypersurface  $\partial E$

Le domaine  $E$  à reconstruire est solution de

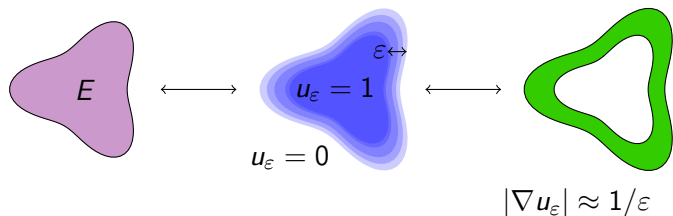
$$\min \left( J(E) \mid \omega^{int} \subset E \subset \mathbb{R}^d \setminus \omega^{ext} \right)$$

où  $J$  désigne ou bien  $P$ , ou bien  $W$

# Plan

- 1 Modèle mathématique
- 2 Approximation**
- 3 Méthode numérique et expérience

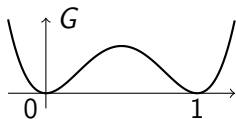
## Approximation du périmètre - Idée 1



Ainsi  $\int \varepsilon |\nabla u_\varepsilon|^2 dx \approx \frac{1}{\varepsilon} \text{Aire} \approx \frac{1}{\varepsilon} \varepsilon P(E) = P(E)$  lorsque  $\varepsilon \rightarrow 0$ .

## Approximation du périmètre - Idée 2

Potentiel double puits



Par exemple

$$G(s) = \frac{1}{2}s^2(1-s)^2.$$

Si  $\sup_{\varepsilon} \left( \int \frac{1}{\varepsilon} G(u_{\varepsilon}) dx \right) < +\infty$  alors  $u_{\varepsilon} \rightarrow 0$  ou  $1$  presque partout lorsque  $\varepsilon \rightarrow 0$ .

Donc  $u_{\varepsilon}$  approche une fonction indicatrice.

## Approximation par champ de phase

L'approximation par champ de phase du périmètre est donnée par

$$P_\varepsilon(u) = \int \left( \frac{\varepsilon}{2} |\nabla u|^2 + \frac{1}{\varepsilon} G(u) \right) dx$$

$G$  : potentiel double puits

L'approximation par champ de phase de l'énergie de Willmore est donnée par

$$W_\varepsilon(u) = \frac{1}{2\varepsilon} \int \left( \varepsilon \Delta u - \frac{1}{\varepsilon} G'(u) \right)^2 dx$$

# Convergences

Profil de champ de phase associé à un ensemble  $E$  :

$$u_\varepsilon(x) = q \left( \frac{1}{\varepsilon} d_s(x, E) \right)$$

## Convergences

Pour un ensemble borné  $E$

- ▶  $u_\varepsilon \rightarrow \mathbb{1}_E$
- ▶  $P_\varepsilon(u_\varepsilon) \rightarrow \lambda P(E)$  si  $E$  est de périmètre fini
- ▶  $W_\varepsilon(u_\varepsilon) \rightarrow \lambda' W(E)$  si  $\partial E$  est de classe  $C^2$

lorsque  $\varepsilon \rightarrow 0$ .

Les constantes  $\lambda$  et  $\lambda'$  sont explicites et dépendent uniquement du potentiel  $G$ .

# Modélisation en champ de phase

On définit également

$$u_\varepsilon^{int}(x) = q\left(\frac{1}{\varepsilon}d_s(x, \omega^{int})\right) \quad \text{et} \quad u_\varepsilon^{ext}(x) = 1 - q\left(\frac{1}{\varepsilon}d_s(x, \omega^{ext})\right)$$

Ainsi,

$$\omega^{int} \subset E \subset \mathbb{R}^d \setminus \omega^{ext} \quad \Leftrightarrow \quad u_\varepsilon^{int} \leq u_\varepsilon \leq u_\varepsilon^{ext}$$

Le domaine  $E$  à reconstruire est approché par  $E_\varepsilon = \{x \mid u_\varepsilon(x) \geq 1/2\}$  où  $u_\varepsilon$  est solution de

$$\min \left( J_\varepsilon(u) \mid u_\varepsilon^{int} \leq u \leq u_\varepsilon^{ext} \right)$$

où  $J_\varepsilon$  désigne ou bien  $P_\varepsilon$ , ou bien  $W_\varepsilon$ .

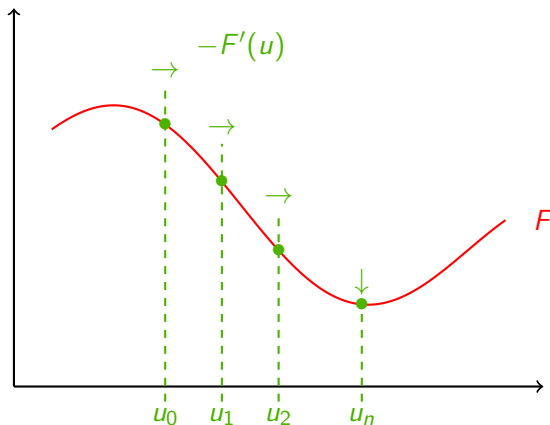
# Plan

- 1 Modèle mathématique
- 2 Approximation
- 3 Méthode numérique et expérience

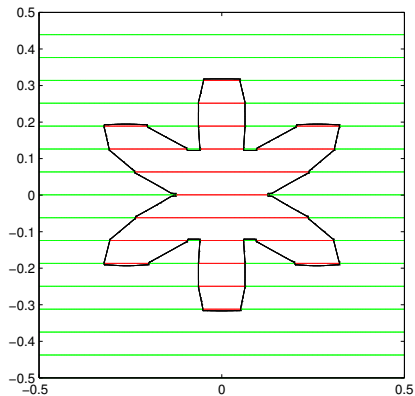


# Schéma numérique

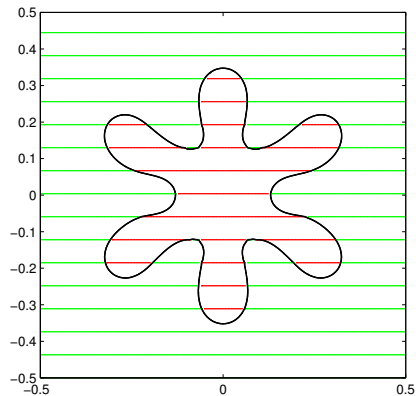
On utilise une descente de gradient sous contraintes



## Une première simulation numérique

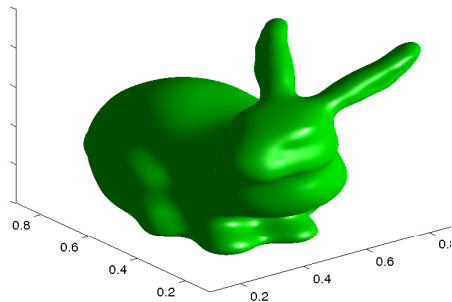
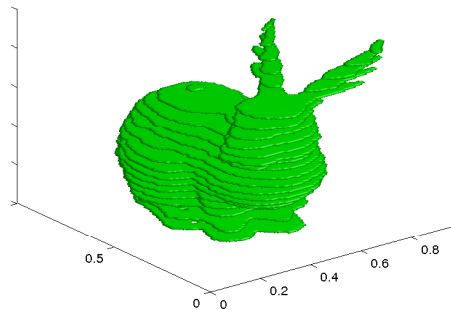


Périmètre



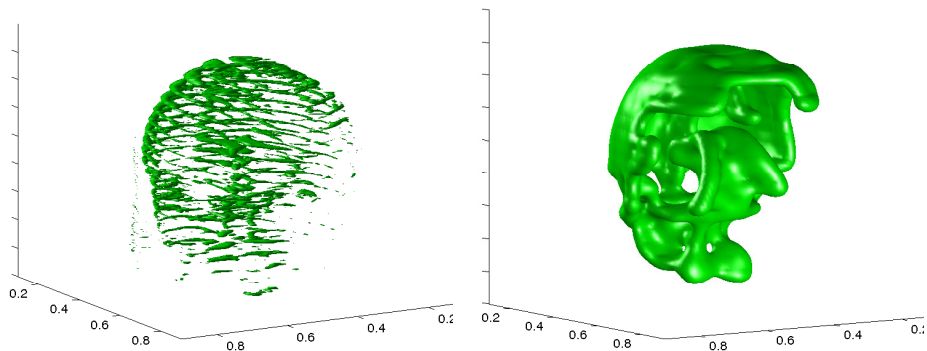
Willmore

## Reconstruction 3D



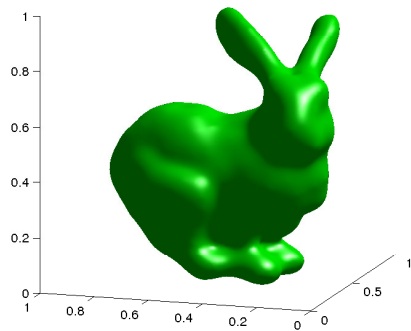
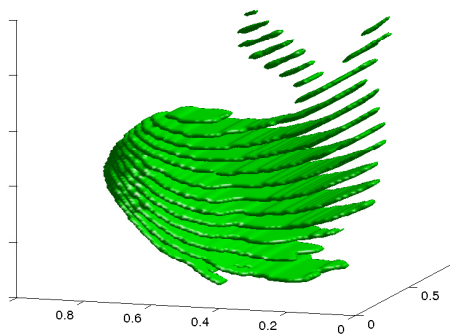
Lapin de Stanford

## Reconstruction 3D



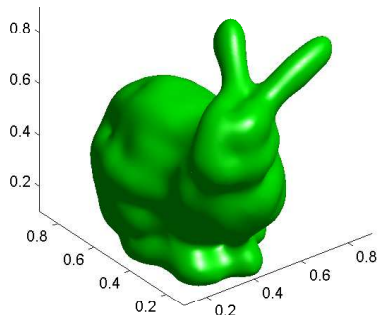
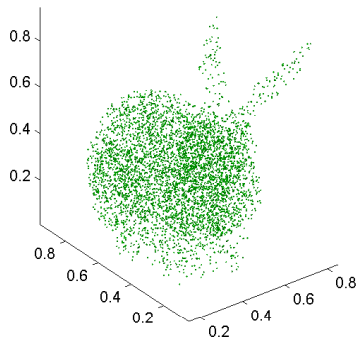
Cerveau

## Autres styles de coupes



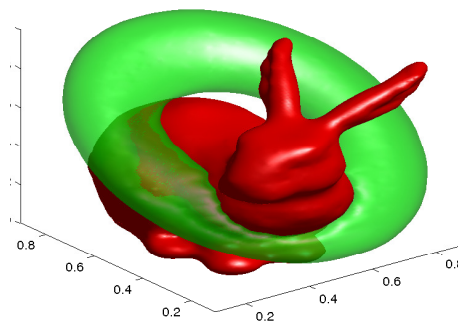
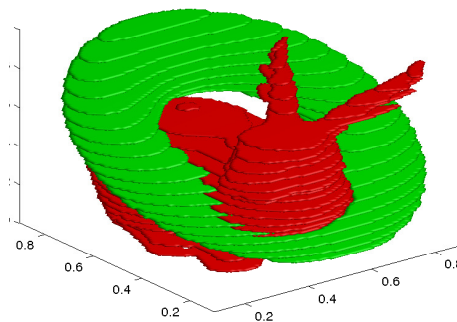
Coupes non droites

## Autres styles de coupes



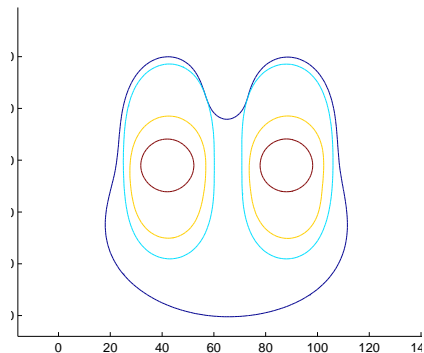
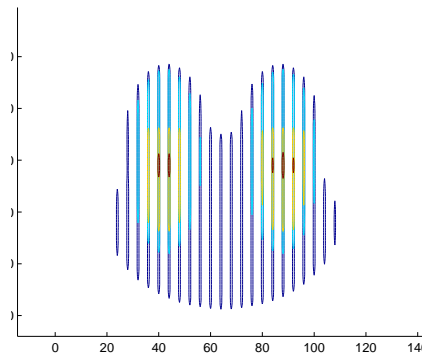
Nuage de points 3D

## Reconstruction simultanée de plusieurs domaines



Reconstruction de deux domaines

## Reconstruction simultanée de plusieurs domaines



Reconstruction de domaines emboîtés



# Merci de votre attention



PS : le lapin va bien.